ГЛАВА 4

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ

4.1. Перенос заряда и плотность тока

Причиной электрического тока является перемещение носителей заряда. Электрический ток в проволоке измеряется количеством заряда, проходящим через любое сечение проволоки в единицу времени. В употреблявшихся нами до сих пор единицах ток следует выражать в ед. СГСЭ$_q$/*сек*. Практическая единица тока — ампер соответствует переносу заряда в один кулон за одну секунду. Один ампер равен $3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ$_q$/*сек*, что эквивалентпо $6{,}2 \cdot 10^{18}$ *электронов/сек*. Конечно, всегда имеется в виду перенос полного заряда с учетом знаков. Можно сказать, что движение нейтрального тела связано с переносом заряда чудовищной величины (около 10^5 кулонов на грамм вещества). Однако тока на самом деле нет, потому что движется в точности одинаковое число положительных и отрицательных элементарных частиц с совершенно одинаковой средней скоростью.

В общем случае ток или перенос заряда связаны с трехмерным движением носителей заряда. Для его описания нам необходимо понятие *плотности тока*. Поскольку носителями заряда являются дискретные частицы, мы должны рассматривать средние значения. Так же как и при определении плотности заряда ρ, шкала расстояний предполагается такой, что в любой малой области, по которой производится усреднение, содержится все еще очень большое число частиц любого интересующего нас сорта.

Рассмотрим вначале особый случай, когда в среднем в одном кубическом сантиметре находится n частиц, которые движутся с одной и той же скоростью $\mathbf{u}$ и несут одинаковый заряд q. Представим себе небольшую рамку с площадью $\mathbf{a}$, имеющую определенную ориентацию в пространстве, как показано на рис. 4.1, *а*. Сколько частиц пройдет внутри рамки за время Δt? Если Δt начинается в момент, показанный на рис. 4.1, *б*, тогда в ближайшие Δt *сек* через рамку пройдут как раз те частицы, которые сейчас находятся внутри косой призмы на рис. 4.1, *б*. Основанием этой призмы является площадь рамки, а длина ее ребра равна $u\Delta t$, т. е. расстоянию, которое проходит каждая частица за время Δt. Частицы, находящиеся снаружи призмы, пройдут мимо рамки или не дойдут до нее. Объем призмы есть произведение основания на высоту или $au\,\Delta t\cos\theta$, что можно записать так: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\,\Delta t$. В среднем число частиц в этом объеме равно $n\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}\,\Delta t$. Следовательно, *средняя скорость* прохождения заряда через рамку, или ток через рамку, который мы обозначим $I(a)$, равен

$$I(a)=\frac{q\,(n\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\,\Delta t)}{\Delta t}=nq\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}. \qquad (1)$$

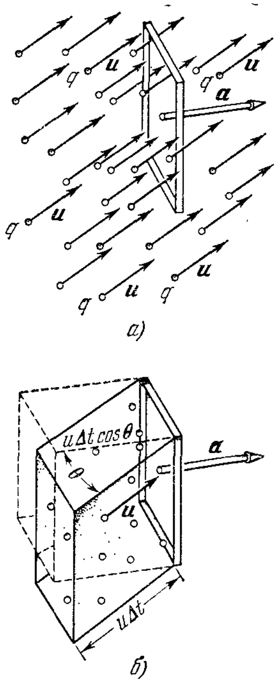

Рис. 4.1. *а*) Поток заряженных частиц, движущихся с одинаковой скоростью **u**. Площадь рамки **a**. В ближайшие Δt *сек* через рамку пройдут частицы, заключенные внутри косой призмы. *б*) Площадь основания призмы равна **a**, высота $u\Delta t\cos\theta$, следовательно, объем призмы $au\,\Delta t\cos\theta$ или $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\Delta t$.

Предположим, что мы имеем частицы разных типов, отличающиеся своими зарядами или векторами скорости, или тем и другим вместе. Частицы каждого типа дают свой вклад в ток через **a**. Обозначим тип частиц индексом k. Тогда каждая частица k-го типа имеет заряд q_k, движется со скоростью $\mathbf{u}_k$, и средняя плотность частиц этого типа равна n_k частиц на кубический сантиметр. Формально это можно выразить так:

$$I(a)=n_1q_1\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_1+n_2q_2\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_2+\ldots=$$
$$=\mathbf{a}\cdot\sum_k n_kq_k\mathbf{u}_k. \qquad (2)$$

Векторная величина, на которую умножается **a** в уравнении (2), называется *плотностью тока* **J**:

$$\mathbf{J}=\sum n_kq_k\mathbf{u}_k. \qquad (3)$$

Ее можно выражать в ед. СГСЭ$_q$/*сек·см*^{2}. При использовании практических единиц, когда единицей заряда является кулон, плотность тока выражается в амперах на квадратный сантиметр.

Рассмотрим вклад в плотность тока от носителей заряда данного типа, скажем, от электронов, которые могут иметь самые различные скорости. В проводнике электроны имеют почти случайное распределение скорости, как по направлению, так и по величине. Чтобы вычислить с р е д н ю ю с к о р о с т ь всех электронов, как и всякое среднее, нужно разбить электроны на группы, приписать каждой скорости вес, равный числу электронов в группе, произвести сложение и разделить на полное число электронов. Таким образом,

$$\bar{\mathbf{u}}=\frac{1}{N_e}\sum_k n_k\mathbf{u}_k. \qquad (4)$$

Черточка над **u** означает среднее по распределению. Сравнивая (4) с (3), мы видим, что вклад электронов в плотность тока легко выразить через среднюю скорость электронов. Вспоминая, что для электронов $q=-e$, и используя индекс e, чтобы указать, что все величины относятся к носителям заряда одного типа, можно написать

$$\mathbf{J}_e = -eN_e\overline{\mathbf{u}}_e. \tag{5}$$

Этот результат может показаться довольно очевидным; мы провели детальные вычисления, чтобы стало ясно, что ток внутри рамки зависит только от средней скорости носителей, которая часто составляет весьма малую долю от их случайных скоростей. Не забудьте, что (4) описывает векторное среднее; оно равно нулю для такого распределения скоростей, где все направления равновероятны, какими бы ни были сами скорости.

4.2. Стационарные токи

Ток в длинном проводнике, например в проволоке, равен, разумеется, интегралу от плотности тока **J** по поперечному сечению проволоки. В самом деле, ток I, протекающий через некоторую поверхность S, равен поверхностному интегралу

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}. \tag{6}$$

I есть «поток», связанный с вектором **J**; название в этом случае выбрано удачно.

Если вектор плотности тока **J** повсюду остается постоянным с течением времени, то мы говорим о системе стационарных токов. Стационарные токи удовлетворяют закону сохранения заряда. Рассмотрим некоторую область пространства, полностью окруженную шарообразной поверхностью S. Поверхностный интеграл от **J** по всей поверхности S дает скорость истечения зарядов из замкнутого объема. Она будет положительной, если носители положительного заряда движутся наружу, а отрицательного — внутрь. Если бы такое истечение зарядов продолжалось до бесконечности, рано или поздно объем лишился бы зарядов — если только не рождаются новые заряды. Однако как раз рождение зарядов происходить не может. Поэтому при истинно независимом от времени распределении токов поверхностный интеграл от **J** по любой замкнутой поверхности должен быть равен нулю. Это полностью эквивалентно утверждению, что в любой точке пространства

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0 \tag{7}$$

(независимое от времени распределение зарядов).

Чтобы доказать эквивалентность, вспомним теорему Гаусса и наше фундаментальное определение дивергенции через интеграл по малой поверхности, охватывающей рассматриваемую точку.