


грубым злоупотреблением по отношению к такому эталонному элементу. Электродвижущая сила элемента Вестона воспроизводима в высокой степени. В несколько другом варианте, когда водный раствор насыщен избыточным сульфатом кадмия в области обоих электродов, электродвижущая сила при 20°C равна $1,0183$ в. Применяя в качестве эталона элемент Вестона и подходящий потенциометр, можно надежно измерять разность потенциалов с точностью до одной миллионной.

По отношению к внешней цепи элемент вполне можно представлять в виде эквивалентной схемы, состоящей из источника электродвижущей силы \mathcal{E} , соединенного последовательно с некоторым внутренним сопротивлением R_i . Присоединение к внешнему сопротивлению R дает в результате ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{(R + R_i)},$$

как это показано на рис. 4.20.

4.11. Переменные токи в конденсаторах и сопротивлениях

Пусть конденсатор, емкость которого C , заряжен до некоторого потенциала V_0 . Будем разряжать конденсатор, соединив его с концами сопротивления R . На рис. 4.21 показаны конденсатор, обозначенный, как принято, символом , сопротивление R и выключатель, который мы замкнем в момент времени $t=0$. Ясно, что по мере протекания тока конденсатор будет постепенно терять свой заряд, напряжение на конденсаторе будет уменьшаться, а это в свою очередь приведет к уменьшению тока. Чтобы увидеть, что, собственно, происходит, достаточно только выписать условия, которым подчиняется цепь. Пусть Q — заряд на конденсаторе в любой момент, V — разность потенциалов на его пластинах, равная напряжению на конденсаторе. Пусть I — ток, считаваемый положительным, если он течет от положительной пластины конденсатора. Все эти величины, являющиеся функциями времени, должны быть связаны следующим образом:

$$Q = CV, \quad I = \frac{V}{R}, \quad -\frac{dQ}{dt} = I. \quad (28)$$

Исключая I и V , получим уравнение, управляющее изменением Q во времени:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}. \quad (29)$$

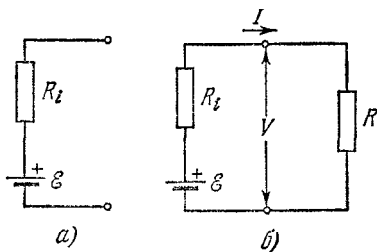


Рис. 4.20. а) Эквивалентная схема гальванического элемента — сопротивление R_i , включенное последовательно с источником электродвижущей силы, имеющей определенное значение \mathcal{E} . б) Расчет тока в цепи с гальваническим элементом:

$$I = \mathcal{E}/(R + R_i), \quad V = \mathcal{E} - IR_i.$$

Записав его в виде

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}, \quad (30)$$

мы можем проинтегрировать обе части, что дает

$$\ln Q = \frac{-t}{RC} + \text{const.} \quad (31)$$

Поэтому решение нашего дифференциального уравнения выглядит так:

$$Q = (\text{другая константа}) \cdot e^{-t/RC}. \quad (32)$$

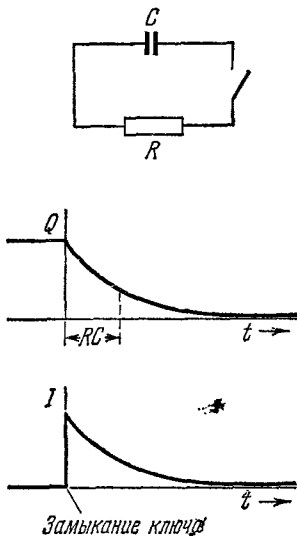
Мы говорили, что при $t=0$ $V=V_0$, поэтому при $t=0$ $Q=CV_0$. Это определяет константу, и теперь мы знаем поведение Q после замыкания цепи:

$$Q = CV_0 e^{-t/RC}. \quad (33)$$

Теперь легко получить выражение для тока:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}. \quad (34)$$

При замыкании выключателя ток мгновенно возрастает до величины V_0/R , а затем экспоненциально спадает до нуля. Характерное время этого спада есть константа RC . Нас не должно удивлять, что произведение сопротивления и емкости имеет размерность времени, так как мы знаем, что C имеет размерность длины, и мы уже отмечали, что произведение «сопротивления \times длина» имеет размерность времени. Часто говорят о «постоянной времени RC » для цепи или для ее части.



В практической системе единицей емкости является фарада. Конденсатор емкостью в одну фараду несет заряд в один кулон при разности потенциалов в один вольт. Если R выражено в омах, а C — в фарадах, то произведение RC есть время в секундах. Чтобы это проверить, заметим, что $\text{ом} = \text{вольт/ампер} = \text{вольт} \cdot \text{сек/кулон}$, а $\text{фарада} = \text{кулон/вольт}$. Если цепь рис. 4.21 сделать из конденсатора емкостью $0,05 \text{ мкф}$ и из сопротивления 5 Мом , что легко найти в любой лаборатории, мы будем иметь $RC = 5 \cdot 10^6 \cdot 0,05 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$, или $0,25 \text{ сек}$.

Рис. 4.21. Заряд и ток в цепи с емкостью C и сопротивлением R . За время RC заряд уменьшается в e раз.

Вообще в любой электрической системе, составленной из заряженных проводников и путей тока, обладающих сопротивлением,

один из временных масштабов (но, может быть, не только один) для процессов внутри системы задается неким произведением емкости на сопротивление. Это относится к нашему недавнему наблюдению относительно размерности удельного сопротивления. Представим себе конденсатор с пластинами площадью A и зазором между ними s . Его емкость C равна $A/(4\pi s)$. Теперь вообразим, что пространство между пластинами внезапно заполняется проводящей средой с удельным сопротивлением ρ . Чтобы обойти вопрос о том, как это может повлиять на емкость, предположим, что среда — это очень слабо ионизованный газ; вещество с такой низкой плотностью едва ли вообще повлияет на емкость. Возникшая проводящая перемычка будет разряжать конденсатор так же эффективно, как и внешнее сопротивление на рис. 4.21. Как быстро будет это происходить? Сопротивление перемычки R равно $\rho s/A$. Следовательно, постоянная времени RC есть $(\rho s/A)(A/4\pi s) = \rho/4\pi$. Это время не зависит от свойств и абсолютных размеров емкости. Здесь мы просто имеем постоянную времени для процесса перераспределения заряда, т. е. для релаксации (затухания) электрического поля в проводящей среде. На самом деле для описания этой ситуации нет надобности в пластинах конденсатора. Если в проводящей среде поместить два слоя зарядов друг против друга, то они вскоре исчезнут, электрическое поле — тоже, а среда вернется к постоянному потенциалу. Время релаксации определяется удельным сопротивлением ρ . Например, если наш слабо ионизованный газ имеет удельное сопротивление 10^8 ом·см, время релаксации должно быть около 10 мксек.

Припомним, что по-настоящему хорошие проводники, например металлы, имеют удельное сопротивление порядка 10^{-5} ом·см, что приводит, как мы теперь видим, к времени релаксации порядка 10^{-18} сек. Подобное число должно возбуждать подозрения. Можно ли его в самом деле интерпретировать как время, необходимое для рассеяния сконцентрированной в проводнике энергии? Прежде всего заметим, что оно значительно короче любого времени между соударениями, или же времени потери корреляции, которое мы могли бы вывести из нашей модели проводимости. Из формулы (19) мы получили, что для металлического натрия при комнатной температуре $\tau = 3 \cdot 10^{-14}$ сек. По-видимому дело в том, что для быстро протекающих явлений мы вообще не можем пользоваться значением удельного сопротивления для постоянного тока ρ . Тем самым ставятся под сомнение всякие количественные оценки времени релаксации.

Существует, однако, еще более глубокое основание подозревать, что история не кончена. Это — тот любопытный факт, что наше время электрической релаксации $\tau = \rho/4\pi$, по-видимому, не зависит от размеров участвующей в релаксации области. Все это прекрасно, покуда область достаточно мала, но если при некотором конечном времени релаксации τ наша область хотя бы в одном направлении больше произведения τ на скорость света, тогда релаксация должна означать распространение перестройки зарядов со скоростью, большей c . Это

несовместимо с теорией относительности. Таким образом, сразу видно, что если поведение электрических зарядов и полей должно согласоваться с постулатами специальной теории относительности, то в картину следует включить кое-что новое. Это и будет темой следующих глав.

Задачи

4.1. *Упражнение на плотность тока.* Имеется $5 \cdot 10^{10}$ двухзарядных положительных ионов на 1 см^3 . Все они движутся на запад со скоростью 10^7 см/сек . В той же области имеется 10^{11} электронов на 1 см^3 , движущихся на северо-восток со скоростью 10^8 см/сек . (Не спрашивайте, как это им удастся!) Каково напр. давление плотности тока \mathbf{J} ? Какова ее величина в единицах $\text{ГСЭ}_q/\text{сек} \cdot \text{см}^2$ и в амперах на квадратный сантиметр? Ответ. $48,8^\circ$ к юго-западу; $5,14 \cdot 10^9$ ед. $\text{ГСЭ}_q/\text{сек} \cdot \text{см}^2$; $1,71 \text{ а/см}^2$.

4.2. *Ток, созданный движущимися по орбите электронами.* В электронном синхротроне на 6 Бэв электроны движутся по приблизительно круговой орбите длиной 240 м. Во время цикла ускорения на этой орбите обращается обычно около 10^{11} электронов. Скорость электронов практически равна скорости света. Чему равен ток? Мы приводим эту простую задачу, чтобы подчеркнуть, что в нашем определении тока, как скорости переноса заряда, вовсе не требуется, чтобы носители были нерелятивистскими, и, кроме того, не существует правила, запрещающего считать, для вклада в ток, данную заряженную частицу много раз в секунду. Ответ. $0,020 \text{ а}$.

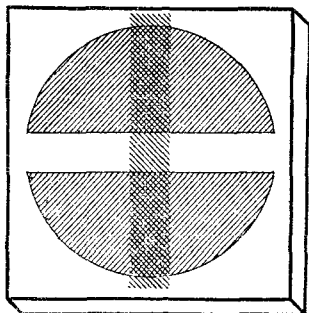
4.3. *Механическое перемещение заряда.* В электростатическом генераторе Ван-де-Граафа прорезиненная лента шириной 30 см движется со скоростью 20 м/сек. Около нижнего шкива ленте сообщается поверхностный заряд, причем поверхностная плотность заряда настолько велика, что создает по обеим сторонам ленты поле в 40 ед. $\text{ГСЭ}_V/\text{см}$. Чему равен ток в миллиамперах? Ответ. $0,127 \text{ ма}$.

4.4. *Поток электронов в вакуумном диоде.* Рассмотрим вакуумный диод с плоскопараллельными катодом и анодом, как на рис. 4.2. Расстояние между катодом и анодом равно 5 см, площадь каждого электрода $A \text{ см}^2$, а ток электронов, испускаемых с катода и движущихся к аноду, составляет I ед. $\text{ГСЭ}_q/\text{сек}$. Потенциал катода возьмем равным нулю, а потенциал анода поддерживается равным $+V_0$ ед. ГСЭ_V . Какова скорость электрона v и плотность пространственного заряда ρ в функции расстояния от катода x ? Пусть ток настолько слаб, что на электрическое поле пространственный заряд не влияет, а электроны покидают катод с нулевой начальной скоростью.

4.5. *Скорость дрейфа электронов проводимости в металле.* Если предположить, что число электронов проводимости в металле, например в серебре, равно числу атомов, то какой будет скорость дрейфа электронов проводимости в серебряной проволоке диаметром 1 мм, по которой идет ток 30 а? Дайте приблизительный ответ; возьмите примерные значения необходимых для вычисления констант, если их нет в наших таблицах. Ответ. $\bar{v} \approx 0,4 \text{ см/сек}$.

4.6. *Ионная проводимость воздуха.* Контейнер, наполненный воздухом при комнатной температуре и давлении, освещается пучком рентгеновских лучей, которые ионизуют небольшую часть молекул. Отрицательными ионами являются молекулы O_2 с прилипшими к ним добавочными электронами, по одному на каждую молекулу. В этой задаче можно считать, что все молекулы имеют одинаковый молекулярный вес, промежуточный между O_2 и N_2 . Пусть размеры контейнера $10 \times 10 \times 2 \text{ см}^3$, и предположим, что стенки $10 \times 10 \text{ см}^2$ сделаны из металла, а остальные — из изолирующего материала. К проводящим стенкам приложена э. д. с. величиной 1000 в, вызывающая ток $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ а}$. Какова проводимость этого слабо ионизованного газа? Если принять, что средняя скорость ионов $5 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$, а средняя длина свободного пробега 10^{-5} см , то каково среднее время между столкновениями? Какая часть k молекул газа ионизована? (Пусть число положительных и отрицательных однозарядных ионов одинаково.) Ответ. $\sigma = 27 \text{ сек}^{-1}$; $k = 1,2 \cdot 10^{-12}$.

4.7. *Простая задача на удельное сопротивление.* Экспериментатор хочет приготовить слой алюминия толщиной 50 \AA , испаряя в вакууме алюминий на чистую поверхность стекла. Сначала он наносит довольно толстый слой, оставляя в центре чистую полоску, закрытую маской. Потом, используя другую маску, он напыляет на стекло поперек зазора полоску той же ширины. Одновременно толстые слои используются как выводы для измерения сопротивления. При какой величине сопротивления испарение следует остановить? (Удельное сопротивление чистого алюминия при комнатной температуре равно $2,83 \cdot 10^{-6} \text{ ом}\cdot\text{см}$.)
 Ответ. $R=5,66 \text{ ом}$.

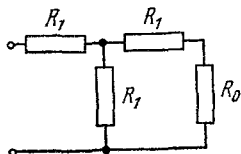


К задаче 4.7.

4.8 *Сопротивление составного проводника.* Чистое железо имеет удельное сопротивление $10,0 \cdot 10^{-6} \text{ ом}\cdot\text{см}$ при 20°C . Удельное сопротивление меди при этой температуре $1,77 \cdot 10^{-6} \text{ ом}\cdot\text{см}$. Рассмотрим два разных составных проводника. Каждый имеет длину 1 м и квадратное поперечное сечение со стороной $0,8 \text{ см}$. Проводник А состоит из соединенных концами прутков прямоугольного сечения из железа и меди длиной 50 см . Проводник В состоит из прутков меди и железа сечением $0,4 \times 0,8 \text{ см}^2$ и длиной 1 м , прижатых друг к другу с боков. Каково сопротивление обоих проводников в омах, измеренное между концами, на длине 1 м ? Если по проводнику А течет постоянный ток, в каком материале будет больше рассеяние мощности? Ответьте на тот же вопрос для стержня В.
 Ответ. $R_A=9,2 \cdot 10^{-4} \text{ ом}$; $R_B=5,53 \cdot 10^{-4} \text{ ом}$.

4.9 *Вопрос для обсуждения.* Если растянуть медную проволоку, сделав ее длиннее на $0,1\%$, то насколько изменится ее сопротивление? Какие предположения вы сделаете относительно поведения меди при деформации?

4.10. *Ток в проводящей среде больших размеров.* Два электрода — металлические шары диаметром 30 см — подвешены в глубине океана на изолированных кабелях. Шары висят на глубине 60 м . Расстояние между ними по горизонтали 300 м . Цепь замыкается изолированным кабелем, идущим к кораблю, который стоит над одним из шаров. Принимая проводимость морской воды равной $0,04 \text{ (ом}\cdot\text{см)}^{-1}$, оцените ожидаемое сопротивление этой цепи. Прежде всего вы должны решить, чем, главным образом, обусловлено сопротивление океана по пути между шарами: областью в непосредственной близости от шаров или же всем огромным объемом океана. Для уяснения вопроса можно рассмотреть сопротивление между двумя концентрическими сферами, одна из которых имеет много больший радиус, причем пространство между ними заполнено однородной средой. Кроме того, вы можете нарисовать линии тока в океане между шарами. Этот вопрос о сопротивлении цепи, одной из частей которой является зонд из проводника, опущенный в плохую проводящую среду, важен не только в геофизике, но и во многих физиологических исследованиях.



К задаче 4.11.

4.11. На схеме (см. рисунок) дано сопротивление R_0 . Каким должно быть значение R_1 , чтобы входное сопротивление между зажимами было равно R_0 ?

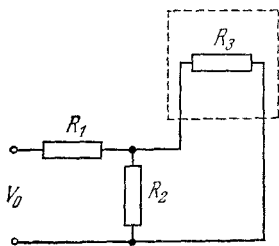
Ответ. $R_1=R_0/\sqrt{3}$.

4.12. Когда батарея с неизвестным напряжением V , не имеющая внутреннего сопротивления, присоединяется к концам сопротивления R , амперметр в цепи показывает ток 4 а . Когда последовательно с R включается сопротивление 10 ом , ток падает до 3 а . Чему равны величины R и V ? Если батарея имеет внутреннее сопротивление R_i , то какой набор опытов требуется для определения R , V и R_i ?

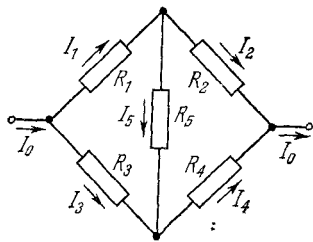
4.13. Покажите, что если батарея с фиксированной э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением R_i соединена с переменным внешним сопротивлением R , то при $R=R_i$ на внешнем сопротивлении выделяется максимальная мощность.

4.14. К некоторому прибору, находящемуся внутри цилиндра высокого давления, необходимо подводить тепло с весьма постоянной скоростью. Во время

опыта меняется давление, и это вызывает некоторое изменение сопротивления любой проволоки, используемой в качестве нагревателя. На рисунке показана простая схема, помогающая в подобной ситуации. Сопротивление R_3 — это обмотка нагревателя, помещенная внутри цилиндра высокого давления. R_1 и R_2 — фиксированные сопротивления, которые находятся снаружи и могут считаться постоянными. V_0 — постоянное приложенное напряжение. Идея заключается в том, чтобы сделать в первом приближении рассеиваемую на сопротивлении R_3 мощность независимой от его величины. Возможность этого видна из следующих соображений. Если R_3 стремится к нулю, рассеиваемая на нем мощность должна стремиться к нулю, поскольку ток ограничивается величиной R_1 . С другой стороны, если R_3 бесконечно растет, мощность тоже стремится к нулю, поскольку напряжение на R_3 ограничено. Где-то посередине должен быть максимум. Ваша задача — отыскать этот максимум, т. е. найти такое соотношение между R_1 , R_2 и R_3 , при котором достигается желаемая нечувствительность мощности к изменениям сопротивления R_3 .



К задаче 4.14.



К задаче 4.15.

4.15. В показанной на рисунке схеме моста указаны сопротивления R_1, \dots, R_5 и ток I_0 , втекающий слева и вытекающий справа. Решение этой цепи заключается в определении токов во всех ветвях. На рисунке этим пяти неизвестным токам приписаны стрелками произвольные направления. Если на самом деле в какой-нибудь ветви ток течет обратно направлению стрелки, то окажется, что он имеет отрицательную величину. Для каждой из четырех точек соединения, или узлов, справедливо уравнение типа $I_0 - I_1 - I_3 = 0$. Выпишите эти уравнения и покажите, что только три из них независимы. Применяя условие 3) раздела 4.8 к двум контурам, получите еще два уравнения. (Заметим, что можно насчитать три контура, но только два уравнения для контуров независимы.) Теперь у вас пять независимых уравнений с пятью неизвестными, и остается только призвать на помощь алгебру. Когда вы получите решение, хороший способ его проверки — положить одно или несколько из R равными нулю. Тем самым схема моста сводится к простой схеме, в которой распределение токов очевидно. Например, чему будет равно I , если $R_5 = 0$?

4.16. Задача, из которой видно, почему мы обычно считаем, что вытекающий из участка цепи ток равен втекающему току. В качестве иллюстрации к сноске на стр. 139 рассмотрим «черный ящик», представляющий собой куб с ребром 10 см, с двумя зажимами. Зажимы соединены проводами с некоторой наружной цепью, в остальном же ящик хорошо изолирован. Через этот элемент цепи протекает ток приблизительно в один ампер. Предположим теперь, что втекающий и вытекающий токи отличаются на одну миллионную. Сколько приблизительно времени потребуется ящику, чтобы его потенциал возрос на 1000 в, если ничего не предпринимать? Ответ. $\tau \approx 6 \cdot 10^{-3}$ сек.

4.17. Изменения энергии в цепи RC. Вернитесь к приведенному в тексте примеру разряда конденсатора C через сопротивление R и покажите, что полная рассеянная в сопротивлении энергия равна энергии, первоначально запасенной в конденсаторе. Предположим, что вам возражают так: ведь конденсатор в действительности никогда не разряжается целиком, потому что Q становится равным нулю только при $t = \infty$. Как вы ответите на это возражение? При некоторых разум-

ных предположениях вы сможете найти время, за которое заряд спадет до одного электрона.

4.18. Приблизительно круглая маленькая частица графита диаметром около 10 мкм падает в вакууме, пересекая пучок протонов с энергией 3 кэв. (Ее стряхнули с поверхности, находящейся в нескольких сантиметрах над верхним краем пучка.) Пучок движущихся горизонтально протонов несет ток 10 ма, равномерно распределенный по круглому сечению радиусом 2 см. Будем считать, что трехкиловольтные протоны не могут пройти 10 мкм графита, поэтому каждый попадающий в графит протон застревает в нем. Как по-вашему, что произойдет с частицей графита? Есть несколько вопросов, о которых следует подумать. Сколько протонов должна захватить частица, чтобы ее потенциал стал достаточным для отталкивания остальных протонов? Сколько (приблизительно) времени это займет: больше ли, чем нужно частице, чтобы пересечь весь пучок при падении? Приобретет ли частичка сколько-нибудь заметную скорость в горизонтальном направлении? Сильно ли она нагреется? Сможет ли подобный пучок протонов, направленный вертикально вверх, поддерживать частичку графита в вакууме? (Замечание об единицах. В этой задаче, как и в большинстве задач повседневной физики, приходится иметь дело с величинами, выраженными в самых разнообразных единицах. Некоторые величины надо переводить, причем годится любая единая система — та, которая кажется наиболее отвечающей существу задачи, или та, которая требует минимума пересчетов, или же просто система, которую вам легче вспомнить. Поскольку мы часто выражали емкость в единицах СГСЭ, что отвечает заряду в единицах СГСЭ_q и потенциалу в единицах СГСЭ_v, то и для данного обсуждения можно использовать единицы системы СГСЭ. В этой системе единицей емкости является сантиметр. Вам нужно пересчитать миллиамперы в единицы СГСЭ_q/сек и вспомнить, что 300 в составляет 1 ед. СГСЭ_v. Но можно также работать и в практических единицах; тогда придется выражать емкость частички в фарадах.)

4.19. *Вопрос для обсуждения.* Кто-нибудь может сказать, что скорость носителей заряда ограничивает быстроту перераспределения зарядов в проводнике. Рассмотрим, однако, незаряженный металлический прут, на один конец которого внезапно помещают заряд +1 ед. СГСЭ_q, а на другой — 1 ед. СГСЭ_q. Как долго должны реально двигаться заряды, чтобы снова сделать прут нейтральным? Или рассмотрим следующую ситуацию. Протон с энергией 10 Мэв, который, как легко подсчитать, имеет скорость около $4,5 \cdot 10^9$ см/сек, движется параллельно поверхности медной пластинки в 1 мм от нее. Скорость электронов проводимости в меди едва ли превышает 10^8 см/сек. Как вы думаете, будет наведенный поверхностный заряд следовать за движением протона или отстанет?