Черточка над $\mathbf{u}$ означает среднее по распределению. Сравнивая (4) с (3), мы видим, что вклад электронов в плотность тока легко выразить через среднюю скорость электронов. Вспоминая, что для электронов $q=-e$, и используя индекс e, чтобы указать, что все величины относятся к носителям заряда одного типа, можно написать

$$\mathbf{J}_e = -eN_e\overline{\mathbf{u}}_e. \tag{5}$$

Этот результат может показаться довольно очевидным; мы провели детальные вычисления, чтобы стало ясно, что ток внутри рамки зависит только от средней скорости носителей, которая часто составляет весьма малую долю от их случайных скоростей. Не забудьте, что (4) описывает векторное среднее; оно равно нулю для такого распределения скоростей, где все направления равновероятны, какими бы ни были сами скорости.

4.2. Стационарные токи

Ток в длинном проводнике, например в проволоке, равён, разумеется, интегралу от плотности тока $\mathbf{J}$ по поперечному сечению проволоки. В самом деле, ток I, протекающий через некоторую поверхность S, равен поверхностному интегралу

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}. \tag{6}$$

I есть «поток», связанный с вектором $\mathbf{J}$; название в этом случае выбрано удачно.

Если вектор плотности тока $\mathbf{J}$ повсюду остается постоянным с течением времени, то мы говорим о системе стационарных токов. Стационарные токи удовлетворяют закону сохранения заряда. Рассмотрим некоторую область пространства, полностью окруженную шарообразной поверхностью S. Поверхностный интеграл от $\mathbf{J}$ по всей поверхности S дает скорость истечения зарядов из замкнутого объема. Она будет положительной, если носители положительного заряда движутся наружу, а отрицательного — внутрь. Если бы такое истечение зарядов продолжалось до бесконечности, рано или поздно объем лишился бы зарядов — если только не рождаются новые заряды. Однако как раз рождение зарядов происходить не может. Поэтому при истинно независимом от времени распределении токов поверхностный интеграл от $\mathbf{J}$ по любой замкнутой поверхности должен быть равен нулю. Это полностью эквивалентно утверждению, что в любой точке пространства

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0 \tag{7}$$

(независимое от времени распределение зарядов).

Чтобы доказать эквивалентность, вспомним теорему Гаусса и наше фундаментальное определение дивергенции через интеграл по малой поверхности, охватывающей рассматриваемую точку.

Можно высказать утверждение более общее, чем уравнение (7). Предположим, что ток нестационарен и $\mathbf{J}$ является функцией как x, y и z, так и t. Тогда, поскольку $\int\limits_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}$ есть мгновенная скорость, с которой заряд покидает замкнутый объем, а $\int\limits_V \rho dv$ — полный заряд внутри объема в любой момент времени, то мы имеем

$$\int\limits_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, dv. \tag{8}$$

Пусть рассматриваемый объем стягивается вокруг произвольной точки (x, y, z); тогда уравнение (8) переходит в следующее *):

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{9}$$

(зависящее от времени распределение зарядов).

Производная по времени от плотности заряда ρ написана в виде частной производной, поскольку обычно ρ зависит как от времени, так и от пространственных координат. Уравнения (8) и (9) выражают *закон сохранения заряда*: заряд не может вытекать из некоторого места, если в этом месте не происходит уменьшения заряда.

Поучительным примером стационарного распределения тока является ток в плоском диоде (двухэлектродной электронной лампе). Один из электродов, катод, покрыт материалом, обильно испускающим электроны при нагревании. Другой электрод, анод,— это просто металлическая пластинка. С помощью батареи анод поддерживается при положительном потенциале относительно катода. Электроны из горячего катода вылетают с очень малыми скоростями, но электрическое поле между катодом и анодом ускоряет их по направлению к аноду. Электрический ток в пространстве между катодом и анодом состоит из этих движущихся электронов. Цепь снаружи замыкается током электронов по проводам, может быть, движением ионов в батарее и т. д.,— нас это не интересует. Локальная плотность заряда ρ в произвольной области внутри диода равна просто $-ne$, где n — локальная плотность электронов (число электронов на 1 $см^3$). Локальная плотность тока $\mathbf{J}$ равна, конечно, $\rho\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$— скорость электронов в этой области. Можно принять, что в плоскопараллельном диоде $\mathbf{J}$ не имеет y- и z-компонент (рис. 4.2). Тогда, если условия стационарные, то J_x не должно зависеть от x, потому что при $\operatorname{div}\mathbf{J}=0$ и $J_y=J_z=0$ из (7) следует, что $(\partial J_x/\partial x)$ должно равняться нулю. Это довольно очевидно; в стационарном

*) Если переход от (8) к (9) не кажется нам очевидным, вернитесь к фундаментальному определению дивергенции в гл. 2. Поскольку объем стягивается в точку, мы можем в пределе вынести справа ρ за знак объемного интеграла. Объемный интеграл следует брать в определенный момент времени. Его производная по времени определяется разностью объемных интегралов при t и $t+\Delta t$. Единственное различие между ними связано с изменением ρ, так как граница объема остается на месте.

потоке электронов, движущихся только в направлении x, каждую промежуточную плоскость между катодом и анодом должно пересекать одно и то же число электронов в секунду. Мы приходим к выводу, что ρv постоянно. Но заметьте, что v не постоянно, оно меняется с x, поскольку электроны ускоряются полем. Следовательно, и ρ не постоянно. Действительно, плотность отрицательных зарядов велика около катода и мала около анода, точно так же как плотность автомобилей на шоссе велика в местах с медленным движением и мала в местах с быстрым движением.

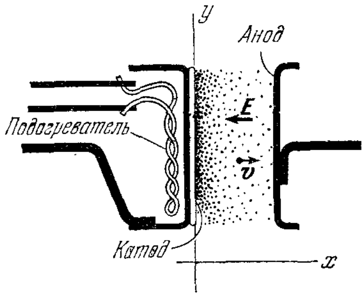

Рис. 4.2. Вакуумный диод с плоскопараллельными катодом и анодом.

Ток в диоде может быть ограничен из-за того, что плотность отрицательных зарядов («пространственный заряд») оказывает влияние на электрическое поле, следовательно на ускорение и на скорость электронов, и, значит,— круг замыкается, и на саму плотность зарядов. В задаче 4.25 разобрано поведение диода «с ограничением по пространственному заряду» и показано, как вывести любопытное соотношение между напряжением и током, которое управляет этим поведением. Соотношение это важно в электронике не только при конструировании диодов и работе с ними, но также и при конструировании электронных пушек для катодно-лучевых трубок и других подобных устройств.

4.3. Проводимость и закон Ома

Существует много способов привести заряды в движение, в том числе такой, который можно назвать «механическим перемещением» носителей заряда. В электростатическом генераторе Ван-де-Граафа (см. задачу 4.3) изолирующей ленте сообщается поверхностный заряд, который она поднимает к удаленному электроду, наподобие того как эскалатор поднимает людей. Это создает вполне ощутимый ток. В атмосфере заряженные капельки воды при падении под действием силы тяжести образуют часть системы электрических токов Земли. В этом параграфе мы будем рассматривать более обычный способ переноса зарядов, когда на носитель заряда действует сила со стороны электрического поля. Электрическое поле вызывает движение носителей заряда, т. е. вызывает электрический ток. Успех этого действия зависит от физической природы системы, в которой действует поле, т. е. от среды.

Одно из самых ранних экспериментальных открытий в области электрического тока в веществе выражается законом Ома:

$$I = \frac{V}{R}. \tag{10}$$