

должна быть секунда! В этих единицах удельное сопротивление меди равно 10^{-17} сек, а стекла при комнатной температуре — порядка 10^8 сек. Позже мы увидим, что эта любопытная связь времени и вещества имеет разумное физическое истолкование.

4.4. Механизм проводимости

Уравнение (12) описывает наблюдаемое поведение самых обычных веществ в определенном диапазоне условий. Вывести его из фундаментальных законов электрического поля мы не можем. Чтобы понять значение этого уравнения, нам следует разобраться в процессах, которые происходят в каком-нибудь веществе, находящемся в электрическом поле. Эти процессы в различных веществах могут быть самыми разными. Закон Ома замечателен именно тем, что он весьма точно выполняется во множестве веществ и в широком диапазоне значений поля. (В некоторых обстоятельствах он нарушается, даже должен нарушаться, и мы вскоре выясним, почему это бывает.) Начнем с детального описания механизма проводимости в некоторой упрощенной системе, довольно типичной для широкого класса проводников электричества (однако не для всех).

Нам нужны носители заряда, поэтому представим себе среду, которая состоит из равного числа носителей положительного и отрицательного зарядов, скажем, по N носителей в кубическом сантиметре. Пусть положительные носители — это ионы с массой M_+ и зарядом e , а отрицательные — ионы с массой M_- и зарядом $-e$. Плотность тока J будет определяться средними скоростями этих ионов.

К системе приложено постоянное во времени однородное электрическое поле E , поэтому на каждый носитель заряда действует сила. Впервые в этом томе мы рассматриваем силу, действующую на движущийся в электрическом поле заряд. Этот вопрос мы тщательно разберем в гл. 6. Факт — уже использованный нами в т. I — заключается в следующем: сила такая же, как если бы заряд был неподвижен. Это значит, что каждый носитель заряда q , независимо от своего движения, испытывает действие постоянной силы qE .

Здесь мы остановимся, чтобы удивиться тому, что закон Ома все же выполняется! Ведь постоянная сила, действующая на свободный носитель заряда, должна вызывать постоянное ускорение. Но постоянная плотность тока означает отнюдь не постоянное ускорение, а постоянную скорость. Если наша система действительно подчиняется закону Ома, то это должно происходить из-за того, что для наших носителей скорость пропорциональна силе. Следовательно, носители заряда не могут двигаться свободно: что-то должно мешать движению, которое вызывается электрическим полем.

В поисках силы трения, мешающей движению, не надо далеко ходить. Эта сила вызывается столкновениями носителей заряда друг с другом и с любыми другими частицами среды. Как ввести эту силу трения — зависит от особенностей нашей модели. Для определенно-

сти рассмотрим газ, состоящий из нейтральных атомов, положительных ионов и отрицательных ионов, с плотностью, близкой к плотности при нормальных условиях, т. е. около 10^{19} атомов/см³ (рис. 4.4). Предположим, что преобладают нейтральные атомы, а положительные и отрицательные ионы рассеяны между ними. Расстояние между частицами, будь то нейтральные или заряженные, много больше радиусов атомов или ионов, поэтому большую часть времени ионы не находятся в состоянии столкновения.

В отсутствие электрического поля атомы и ионы двигались бы в произвольных направлениях со скоростями, обусловленными температурой. Кинетическая теория газов дает нам связь между температурой и средней кинетической энергией частицы.

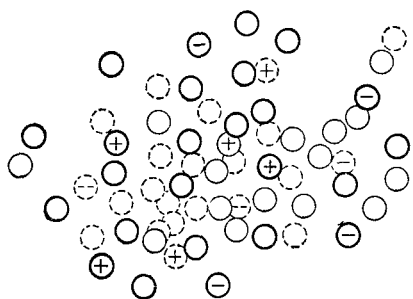


Рис. 4.4. Положительные и отрицательные ионы среди нейтральных атомов.

Если бы мы могли взглянуть на определенный ион в определенный момент времени, скажем при $t=0$, мы бы обнаружили, что он движется со скоростью u . Что произойдет потом? Ион будет двигаться по прямой, пока он не подойдет близко к какому-нибудь атому, достаточно близко, чтобы в игру вступили короткодействующие силы. В этом соударении со-

хранятся полный импульс и полная кинетическая энергия двух тел, но скорость и направление полета иона изменятся — может быть, чуть-чуть, а может быть, очень сильно — и скорость станет равной u' . Потом происходит новое соударение, приводящее к скорости u'' , и т. д. Может случиться также, что ион отклонится от своего пути под действием кулоновской силы другого иона, находящегося неподалеку. Кулоновские силы, которые являются дальнедействующими силами, могут играть важную роль для ионов. Они изменяют скорость в основном малыми порциями, но конечный эффект тот же, что и от короткодействующих сил.

Конечный эффект — и это ключ к нашей задаче — заключается в том, что всякая связь (по величине или направлению) между скоростью иона u при $t=0$ и его скоростью через некоторый интервал времени исчезает. Это значит, что через некоторое время $t=\tau$ вектор скорости иона с равной вероятностью смотрит в любую точку пространства, независимо от направления, которое он имел при $t=0$. Ион «забыл» направление своего первоначального движения. Иными словами, если взять 10 000 ионов, движущихся горизонтально на юг, и проследить за каждым из них τ секунд, то направления их конечных скоростей будут равномерно распределены по всей сфере. Чтобы потерять почти всякую память о направлении, может потребоваться много соударений или всего несколько, смотря по тому, какие соударения происходят чаще: с большим изменением импульса или с малым. Предельным является случай соударения твердых упругих

шаров, когда уже одно соударение полностью «перетасовывает» направления. Нам нет нужды беспокоиться об этих различиях. Главное здесь то, что, каким бы ни был механизм соударения, существует некоторый интервал времени τ , характерный для данной системы, по истечении которого корреляция между начальным и конечным направлениями скорости иона в этой системе в значительной мере утрачивается *). Характерное время τ зависит от иона и от природы окружающих его ионов и молекул; оно, конечно, тем меньше, чем чаще происходят соударения, поскольку между соударениями с ионом в нашем газе ничего не происходит.

Теперь мы можем, наконец, приложить к системе однородное электрическое поле E . Чтобы облегчить рассмотрение ситуации, мы представим себе, что уже в одном соударении происходит полная потеря памяти о направлении. Наш основной вывод не будет зависеть от этого предположения.

Немедленно после соударения ион начинает двигаться в произвольном направлении. Скорость сразу после соударения мы обозначим u^c . Действующая на ион электрическая сила Ee увеличивает импульс иона постепенно. Через время t ион получит от поля приращение импульса Eet , которое просто складывается векторно с первоначальным импульсом Mu^c . Теперь импульс иона равен $Mu^c + Eet$. Если приращение импульса мало по сравнению с Mu^c , т. е. скорость мало изменилась, то можно ожидать, что следующее соударение произойдет в среднем приблизительно через такое же время, как и в отсутствие электрического поля. Другими словами, если поле не очень велико, среднее время между соударениями, которое мы обозначим \bar{t} , не зависит от поля E .

Импульс, полученный от поля, — это всегда вектор с одним и тем же направлением. Но в действительности он утрачивается в каждом соударении, поскольку после соударения направление движения произвольно и не зависит от первоначального направления.

Каков средний импульс всех положительных ионов в данный момент времени? На этот вопрос удивительно легко ответить, если иметь в виду следующее: предположим, что мы в рассматриваемый момент остановим часы и спросим каждый ион, сколько времени прошло после его последнего столкновения. Пусть от положительного иона № 1 мы получили определенный ответ: t_1 . Тогда этот ион должен иметь импульс eEt_1 плюс импульс Mu^c , который он имел сразу за последним столкновением. Поэтому средний импульс всех N положительных ионов равен

$$M\bar{u}_+ = \frac{1}{N} \sum_i (Mu_i^c + eEt_i). \quad (14)$$

*) В принципе для всякой системы можно дать точное определение времени релаксации τ , связав эту величину с корреляцией между начальным и конечным направлениями. Это — задача статистики, подобная изучению корреляции между весом новорожденной и взрослой крысы. Однако для нашего анализа в таком количественном определении нет необходимости.

Здесь u_j^* — скорость, которую имел j -й ион сразу после последнего своего столкновения. Скорости u_j^* совершенно случайно распределены по направлениям и поэтому в среднем дают нуль. Вторая часть есть просто Ee , помноженное на среднее значение t_j , т. е. на среднее время после последнего столкновения. Оно должно быть равно среднему времени до следующего столкновения, и оба они равны среднему времени между столкновениями \bar{t}^*). Приходим к выводу, что средняя скорость положительного иона в постоянном поле E равна

$$\bar{u}_+ = \frac{Ee\bar{t}_+}{M_+}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что средняя скорость носителя заряда пропорциональна приложенной к нему силе. Если обращать внимание только на среднюю скорость, дело выглядит так, как будто среда сопротивляется движению с силой, пропорциональной скорости. Это торможение или трение — «вязкое» торможение, подобное тому, которое вы чувствуете, мешая ложкой густое варенье. Всякий раз, когда носители заряда ведут себя таким образом, мы можем ожидать чего-нибудь вроде закона Ома.

Мы написали в (15) \bar{t}_+ , потому что среднее время между столкновениями для положительных и отрицательных ионов может сильно различаться. Отрицательные ионы приобретают скорость в противоположном направлении, но так как они несут отрицательные заряды, их вклад в плотность тока J прибавляется к вкладу от положительных ионов. Эквивалент уравнения (12), если в переносе заряда участвуют два типа ионов, имеет вид

$$J = Ne \left(\frac{eE\bar{t}_+}{M_+} \right) - Ne \left(\frac{-eE\bar{t}_-}{M_-} \right) = Ne^2 \left(\frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-} \right) E. \quad (16)$$

Из нашей теории следует, что рассмотренная система должна подчиняться закону Ома. Действительно (16) означает линейную зависимость между J и E , а другие величины являются константами, характерными для данной среды. Сравним (16) и (12). Константа $Ne^2 \left(\frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-} \right)$ играет роль проводимости σ .

Мы сделали ряд довольно специальных предположений относительно нашей системы, однако, оглядываясь назад, можно заметить,

*) Вы можете подумать, что среднее время между столкновениями должно было бы быть равно сумме среднего времени после последнего столкновения и среднего времени до следующего. Это было бы верно, если бы столкновения происходили строго через равные интервалы, но это не так. Столкновения являются независимыми случайными событиями, и для них вышеприведенное утверждение справедливо, несмотря на кажущуюся парадоксальность. Поразмыслите об этом. Вопрос не затрагивает нашего главного вывода, но если вы в нем разберетесь, это прибавит вам статистической мудрости. (У к а з а н и е: если данное соударение не влияет на вероятность следующего, — а это и значит, что они независимы, — то запустите вы часы в произвольный момент времени или делаете это в момент какого-нибудь соударения, результат не может измениться.)

что существование линейной связи между \mathbf{E} и \mathbf{J} не зависит от этих предположений. Любая система с постоянной плотностью свободных носителей заряда, в которой движение носителей то и дело «разупорядочивается» столкновениями или иными взаимодействиями внутри системы, должна подчиняться закону Ома, если только поле \mathbf{E} не слишком велико. Отношение \mathbf{J} к \mathbf{E} , которое определяет проводимость среды σ , должно быть пропорционально числу носителей заряда и характеристическому времени τ , времени потери корреляции направлений. Все сложные детали соударений входят в задачу только через эту последнюю величину. Создание детальной теории проводимости для любой заданной системы, если известно число носителей заряда, сводится к созданию теории для τ . В нашем частном примере эта величина была заменена величиной \bar{t} и для проводимости σ был предсказан вполне определенный результат. Вводя более общую величину τ и допуская возможность существования разного числа положительных и отрицательных носителей, мы можем описать результат нашей теории следующим выражением:

$$\sigma \approx e^2 \left[\frac{N_+ \tau_+}{M_+} + \frac{N_- \tau_-}{M_-} \right]. \quad (17)$$

Знак \approx означает, что мы не даем точного определения τ . Однако это можно было бы сделать.

Чтобы подчеркнуть, что проводимость заключается обычно в малом систематическом дрейфе, наложенном на хаотическое движение носителей заряда, рассмотрим рис. 4.5, представляющий собой подобие микроскопического изображения небольшой части системы, о которой шла речь. Положительные ионы изображены черными кружками, отрицательные — светлыми. Мы предполагаем, что последние являются электронами, подвижность которых настолько больше подвижности положительных ионов, что движением положительных ионов вообще можно пренебречь. Из рис. 4.5, *a* видно, что сами частицы и скорости электронов распределены совершенно хаотически. Чтобы сделать рисунок, положение и знак частицы определялись по таблице случайных чисел. Аналогичным образом векторы скорости электронов были нарисованы в соответствии со случайным распределением, отвечающим максвелловскому распределению скоростей молекул газа. На рис. 4.5, *б* положения взяты те же, но ко всем скоростям добавлено небольшое приращение вправо. Таким образом, рис. 4.5, *б* представляет собой картину ионизованного вещества, в котором существует средний поток отрицательного заряда слева направо, что эквивалентно положительному току справа налево. На рис. 4.5, *a* показана ситуация при нулевом среднем токе.

Очевидно, мы не должны ожидать, что действительное среднее от скоростей 46 электронов на рис. 4.5, *a* будет точно равно нулю, поскольку это — статистически независимые величины. Один электрон не влияет на поведение другого. На самом деле и в отсутствие всякого внешнего поля будут наблюдаться случайные флуктуации

электрического тока просто в результате статистических флуктуаций векторной суммы скоростей электронов. Этот спонтанно флуктуирующий ток можно измерить. Он является источником «шума»

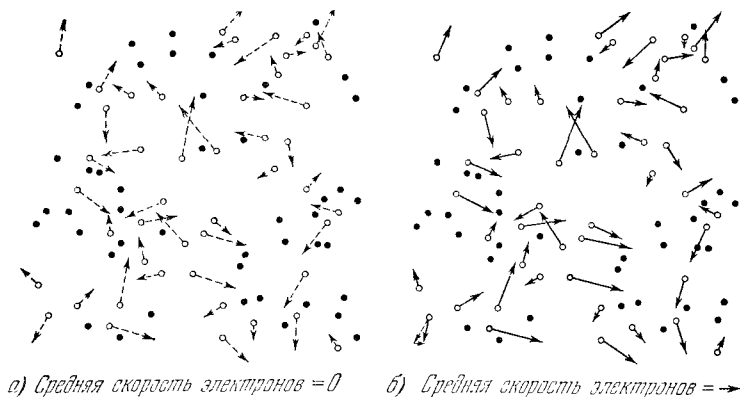


Рис. 4.5. а) Хаотическое распределение примерно равного числа электронов (светлые кружки) и положительных ионов (черные кружки). Скорости электронов показаны векторами и в (а) совершенно случайны. В (б) существует дрейф вправо, представленный вектором скорости →. Эта скорость добавлена к каждой первоначальной скорости электрона, как показано для одного из электронов в левом нижнем углу.

во всех электрических цепях и часто определяет в конечном счете предел чувствительности устройств, регистрирующих слабые электрические сигналы. С этим вопросом вы познакомитесь в т. V нашего курса.

4.5. Где нарушается закон Ома?

Теперь посмотрим, как может нарушаться закон Ома. Предположим, что электрическое поле \mathbf{E} настолько велико, что добавочная скорость, которую приобретает ион между соударениями, сравнима со средней скоростью теплового движения. Это серьезно повлияет на входящее в (16) среднее время между столкновениями, \bar{t}_+ или \bar{t}_- . Времена эти теперь будут функциями \mathbf{E} , а не константами и уравнение (16) станет нелинейным: удвоение величины поля \mathbf{E} не удваивает плотность тока \mathbf{J} , если \bar{t} тоже меняется. Посмотрим, когда такая нелинейность начнется. Наша модель напоминает слабо ионизованный газ. При нормальной плотности средняя длина свободного пробега иона в таком газе имеет порядок 10^{-6} см. Средняя кинетическая энергия хаотического движения — порядка kT , где k — постоянная Больцмана, встречающаяся в кинетической теории газов. Критерий для скорости можно выразить так: мы можем ожидать «неприятностей», если полученная между столкновениями от поля добавочная кинетическая энергия сравнима с kT . Устанавливая между этими энергиями приблизительное равенство

$$eE \cdot 10^{-6} \text{ см} \approx kT \quad (18)$$