

6.3. Векторный потенциал

Мы показали, что скалярная потенциальная функция $\varphi(x, y, z)$ дает возможность простым путем вычислить электростатическое поле распределения зарядов. Если существует некоторое распределение зарядов $\rho(x, y, z)$, то потенциал в любой точке (x_1, y_1, z_1) дается объемным интегралом

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2)}{r_{12}} dv_2. \quad (18)$$

Интегрирование производится по всему распределению зарядов, а r_{12} есть расстояние от (x_2, y_2, z_2) до (x_1, y_1, z_1) . Электрическое поле \mathbf{E} равно взятому с обратным знаком градиенту φ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (19)$$

Этот способ непригоден в данном случае, так как поле \mathbf{B} имеет существенно другой характер. Ротор \mathbf{B} не обязательно равен нулю, следовательно, \mathbf{B} не может, в общем случае, быть градиентом скалярного потенциала. Нам известен, однако, другой вид производной вектора — ротор. Оказывается, \mathbf{B} можно представить не как градиент скалярной функции, а как ротор векторной функции:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (20)$$

По очевидной аналогии мы называем \mathbf{A} *векторным потенциалом*. В данном случае польза такого представления не очевидна. Это выяснится в дальнейшем. Ободряющим является то, что уравнение (16) автоматически удовлетворяется, так как $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$ для любого \mathbf{A} *). Или, выражаясь иначе, тот факт, что $\text{div } \mathbf{B} = 0$ дает нам возможность представить \mathbf{B} в виде ротора другой векторной функции. Нам предстоит теперь выяснить, как вычислить \mathbf{A} , если дана плотность тока \mathbf{J} , чтобы уравнение (20) действительно точно описывало магнитное поле. Принимая во внимание уравнение (15), соотношение между \mathbf{J} и \mathbf{A} запишем в виде

$$\text{rot (rot } \mathbf{A}) = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c}. \quad (21)$$

Уравнение (21), будучи векторным, представляет собой в действительности три уравнения. Попробуем выделить одно из них, скажем x -компоненту уравнения (21). Компонента $(\text{rot } \mathbf{B})_x$ равна $\partial B_z / \partial y - \partial B_y / \partial z$; z - и y -компоненты \mathbf{B} соответственно равны

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (22)$$

Следовательно, x -компонента уравнения (21) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \frac{4\pi J_x}{c}. \quad (23)$$

*) Если этот факт вам неизвестен, вернитесь к задаче 2.15.

Мы предполагаем, что в наших функциях можно менять порядок, в котором берутся частные производные. Используя это свойство и произведя некоторые преобразования, мы можем записать (23) следующим образом:

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \frac{4\pi J_x}{c}. \quad (24)$$

Чтобы сделать это уравнение более симметричным, прибавим и отнимем от его левой части одну и ту же величину, $\partial^2 A_x / \partial x^2$:

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \frac{4\pi J_x}{c}. \quad (25)$$

Мы видим, что первые три члена представляют собой лапласиан A_x со знаком минус. Выражение в скобках — это дивергенция \mathbf{A} . Мы имеем теперь известную свободу в построении \mathbf{A} . Нас интересует только $\text{rot } \mathbf{A}$; $\text{div } \mathbf{A}$ можно выбрать любой. Потребуем, чтобы *)

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (26)$$

Другими словами, среди различных функций, которые могли бы удовлетворить нашему требованию $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, рассмотрим в качестве возможных только те функции, которые имеют нулевую дивергенцию. Тогда эта часть уравнения (25) отпадает и остается просто

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\frac{4\pi J_x}{c}. \quad (27)$$

J_x является известной скалярной функцией от x, y, z . Сравним уравнение (27) с уравнением Пуассона (2.70), которое гласит:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi \rho. \quad (28)$$

Эти два уравнения одинаковы по форме. Мы знаем, как найти решение уравнения (28). Этим решением является объемный интеграл в (18). Следовательно, решением (27) должно служить выражение

$$A_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{c} \int \frac{J_x(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}}. \quad (29)$$

Другие компоненты должны удовлетворять аналогичным формулам. Их можно объединить в одну векторную формулу:

$$\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}}. \quad (30)$$

*) Чтобы показать, почему можно так поступить, предположим, что мы имеем такое \mathbf{A} , что $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, но $\text{div } \mathbf{A} = f(x, y, z) \neq 0$. Рассматривая f как плотность заряда ρ в электрическом поле, мы, очевидно, можем найти поле \mathbf{F} , являющееся аналогом электростатического поля \mathbf{E} и удовлетворяющее условию $\text{div } \mathbf{F} = f$. Но мы знаем, что ротор такого поля будет равен нулю. Следовательно, мы могли бы прибавить \mathbf{F} к \mathbf{A} и получить новое поле с нужным нам ротором и нулевой дивергенцией.

Есть только одно препятствие к этому: мы допустили, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, чтобы получить (27). Откуда известно, что функция \mathbf{A} , полученная из уравнения (30), будет обладать этим свойством? К счастью, можно доказать, что это так.

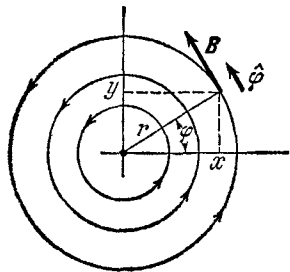


Рис. 6.11. Некоторые силовые линии поля вокруг провода с током. Ток течет по направлению оси z (к вам из плоскости страницы).

В качестве примера рассмотрим векторный потенциал для длинного прямого провода с током I . На рис. 6.11 мы видим, что ток, идущий со страницы на нас, течет вдоль положительного направления оси z . Мы знаем, какой вид имеет магнитное поле прямого провода. Линии поля представляют собой окружности, как уже было показано на рис. 6.5. Несколько таких окружностей приведено на рис. 6.11. Величина поля \mathbf{B} равна $2I/cr$. Используя

единичный вектор $\hat{\phi}$, направленный «по окружности», мы можем записать вектор \mathbf{B} как

$$\mathbf{B} = \frac{2I\hat{\phi}}{cr}. \quad (31)$$

Замечая, что единичный вектор $\hat{\phi}$ есть $-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$, мы можем выразить \mathbf{B} через x и y следующим образом:

$$\mathbf{B} = \frac{2I(-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y})}{c\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2I}{c} \left(\frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2 + y^2} \right). \quad (32)$$

Векторная функция $\mathbf{A}(x, y, z)$, которая удовлетворяет условию $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, имеет вид

$$\mathbf{A} = -\hat{z} \frac{I}{c} \ln(x^2 + y^2). \quad (33)$$

Чтобы проверить это, вычислим компоненты $\nabla \times \mathbf{A}$:

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{-2Iy}{c(x^2 + y^2)} & (= B_x), \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{+2Ix}{c(x^2 + y^2)} & (= B_y), \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 & (= B_z). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Конечно, это не единственная функция, которая может служить векторным потенциалом для данного поля \mathbf{B} . К функции \mathbf{A} уравнения (33) можно было бы добавить любую векторную функцию с нулевым ротором. Все это справедливо для пространства вне провода. Внутри провода поле \mathbf{B} совсем другое и функция \mathbf{A} также должна быть другой. Нетрудно найти подходящую векторную потенциальную функцию для поля внутри сплошного круглого провода (см. задачу 6.13).

Для рассмотренного выше частного случая функция \mathbf{A} не могла быть получена из уравнения (30). Интеграл оказался бы расходящимся вследствие бесконечной длины провода. Это напоминает о трудностях, с которыми мы сталкивались в гл. 2, получая скалярный потенциал для определения электрического поля заряженного провода. Действительно, эти две задачи тесно связаны. Этого следовало ожидать, имея в виду их одинаковую геометрию и сходство уравнений (30) и (18). Мы нашли (уравнение (2.19)), что подходящий скалярный потенциал для линейного заряда равен $-\lambda \ln(x^2 + y^2) + \text{произвольная постоянная}$. Он приписывает нулевой потенциал некоторой произвольной точке, не расположенной ни на проводе, ни на бесконечно большом расстоянии от него. Оба эти потенциала — скалярный и векторный — из уравнения (33) имеют особенности в источнике и в бесконечности.

6.4. Поле произвольного провода с током

На рис. 6.12 изображена петля из провода, по которому течет ток I . Векторный потенциал \mathbf{A} в точке (x_1, y_1, z_1) выражается согласно уравнению (30) интегралом по петле. Для тока, текущего по тонкому проводу, мы можем взять в качестве элемента объема

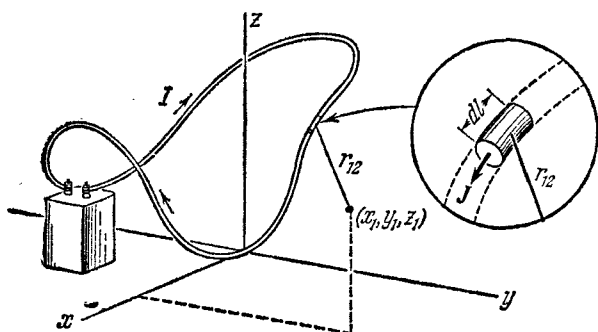


Рис. 6.12. Каждый элемент петли с током вносит вклад в векторный потенциал \mathbf{A} в точке (x_1, y_1, z_1) .

небольшой отрезок провода длиной dl . Плотность тока J равна I/a , где a — площадь поперечного сечения, а $dv_2 = a dl$. Следовательно, $J dv_2 = I dl$, и если мы направим вектор dl в направлении тока, то можно просто заменить $J dv_2$ выражением $I dl$. Таким образом, для тонкого провода, или нити, мы можем записать уравнение (30) как интеграл по контуру:

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{r_{12}}. \quad (35)$$

Вычисление \mathbf{A} во всех точках и затем определение \mathbf{B} как $\text{rot } \mathbf{A}$ было бы длительной работой. Удобнее будет выделить вклад в линейный интеграл для \mathbf{A} , возникающий от элемента провода в начале коор-