

Для рассмотренного выше частного случая функция  $\mathbf{A}$  не могла быть получена из уравнения (30). Интеграл оказался бы расходящимся вследствие бесконечной длины провода. Это напоминает о трудностях, с которыми мы сталкивались в гл. 2, получая скалярный потенциал для определения электрического поля заряженного провода. Действительно, эти две задачи тесно связаны. Этому следовало ожидать, имея в виду их одинаковую геометрию и сходство уравнений (30) и (18). Мы нашли (уравнение (2.19)), что подходящий скалярный потенциал для линейного заряда равен  $-\lambda \ln(x^2 + y^2) + \text{произвольная постоянная}$ . Он приписывает нулевой потенциал некоторой произвольной точке, не расположенной ни на проводе, ни на бесконечно большом расстоянии от него. Оба эти потенциала — скалярный и векторный — из уравнения (33) имеют особенности в источнике и в бесконечности.

#### 6.4. Поле произвольного провода с током

На рис. 6.12 изображена петля из провода, по которому течет ток  $I$ . Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  выражается согласно уравнению (30) интегралом по петле. Для тока, текущего по тонкому проводу, мы можем взять в качестве элемента объема

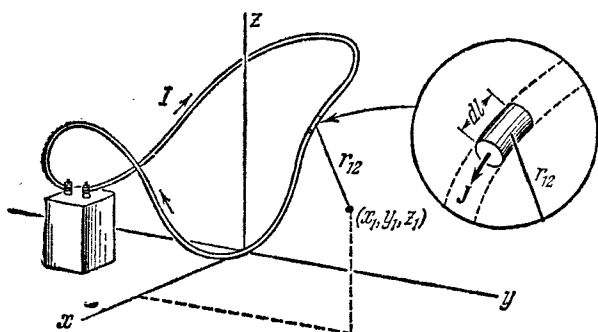


Рис. 6.12. Каждый элемент петли с током вносит вклад в векторный потенциал  $\mathbf{A}$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$ .

небольшой отрезок провода длиной  $dl$ . Плотность тока  $J$  равна  $I/a$ , где  $a$  — площадь поперечного сечения, а  $dv_2 = a dl$ . Следовательно,  $J dv_2 = I dl$ , и если мы направим вектор  $dl$  в направлении тока, то можно просто заменить  $J dv_2$  выражением  $I dl$ . Таким образом, для тонкого провода, или нити, мы можем записать уравнение (30) как интеграл по контуру:

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{r_{12}}. \quad (35)$$

Вычисление  $\mathbf{A}$  во всех точках и затем определение  $\mathbf{B}$  как  $\text{rot } \mathbf{A}$  было бы длительной работой. Удобнее будет выделить вклад в линейный интеграл для  $\mathbf{A}$ , возникающий от элемента провода в начале коор-

динат, где ток течет в направлении  $x$  (рис. 6.13). Обозначим длину этого элемента через  $dl$ . Пусть  $d\mathbf{A}$  будет вкладом этого элемента в интеграл  $\mathbf{A}$ . Тогда в точке  $(x, y, 0)$ , лежащей в плоскости  $xy$ , вектор  $d\mathbf{A}$ , направление которого совпадает с положительным направлением оси  $x$ , равен

$$d\mathbf{A} = \hat{x} \frac{(I/c) dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (36)$$

Из симметрии задачи следует, что вклад этой части  $\mathbf{A}$  в  $\text{rot } \mathbf{A}$  должен быть перпендикулярен к плоскости  $xy$ . Обозначая соответствующую часть  $\mathbf{B}$  через  $d\mathbf{B}$ , имеем

$$d\mathbf{B} = \text{rot}(d\mathbf{A}) = \hat{z} \left( -\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \hat{z} \frac{(I/c) dl \cdot y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{(I/c) dl \sin \varphi}{r^2}. \quad (37)$$

Этот результат сразу освобождает нас от конкретной системы координат. Очевидно, все определяется относительной ориентацией элемента  $dl$  и радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из этого элемента в точку, в которой вычисляют

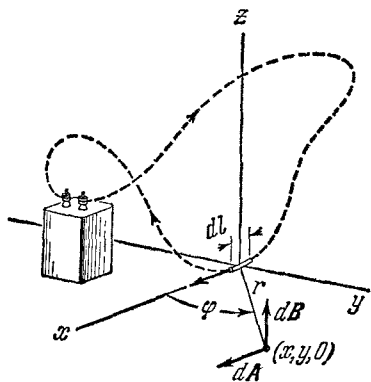


Рис. 6.13. Если мы можем найти  $d\mathbf{A}$  — вклад в  $\mathbf{A}$  от выделенного элемента, то вклад этого элемента в  $\mathbf{B}$  может быть вычислен по формуле  $d\mathbf{B} = \text{rot } d\mathbf{A}$ .

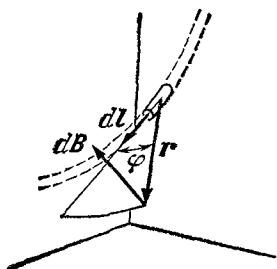


Рис. 6.14. Поле любого контура может быть вычислено с помощью следующего выражения для вклада от каждого элемента цепи;

$$d\mathbf{B} = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{cr^2}.$$

поле  $\mathbf{B}$ . Вклад в  $\mathbf{B}$  от каждого малого элемента провода  $dl$  является вектором, перпендикулярным к плоскости, содержащей  $dl$  и  $\mathbf{r}$ , величина которого  $I dl \sin \varphi / r^2 c$ , где  $\varphi$  — угол между  $dl$  и  $\mathbf{r}$ . Это можно записать с помощью векторного произведения (см. рис. 6.14)

$$d\mathbf{B} = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{cr^2}. \quad (38)$$

Если вы знакомы с правилами векторного исчисления, вы можете легко перейти от уравнения (35) к (38). Когда мы пишем  $d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A}$ , где  $d\mathbf{A} = I dl / cr$ , то рассматриваем  $\nabla$  как вектор, что позволяет менять местами множители векторного произведения и изменять их знак. Здесь  $dl$  является величиной постоянной, так что  $\nabla$

действует только на  $1/r$ , иначе мы не могли бы воспользоваться этим правилом. Вспомним, что  $\nabla(1/r) = -\hat{r}/r^2$  (как при переходе от потенциала Кулона к полю Кулона). Таким образом,

$$d\mathbf{B} = \nabla \times \frac{I d\mathbf{l}}{cr} = -\frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \left( -\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{r}}{cr^2}. \quad (39)$$

В истории физики уравнение (38) известно как закон Био — Савара. Его смысл заключается в том, что если  $\mathbf{B}$  вычислено интегрированием по полному контуру с учетом вкладов от каждого элемента, даваемых этой формулой, то мы получим верное значение результирующего поля  $\mathbf{B}$ . Вклад части контура физически неопределим (см. сноску на стр. 201). Действительно, (38) не является единственной формулой, с помощью которой можно получить правильный результат для  $\mathbf{B}$  — к нему можно было бы добавить любую функцию, которая давала бы нуль при интегрировании по замкнутому пути.

Итак, хотя понятие о векторном потенциале оказало нам существенную помощь, казалось бы, что дальше мы можем обойтись без него. Действительно часто проще вычислить поле системы токов непосредственно, пользуясь полученным нами уравнением (38), чем определять предварительно векторный потенциал. Мы приведем в следующем разделе несколько практических примеров таких расчетов. Однако векторный потенциал важен по более глубоким причинам. Во-первых, он открыл для нас поразительную параллель в отношениях, существующих между электростатическим полем и его источниками (электрическими зарядами) и магнитным полем и источниками этого поля (токами). Величайшая польза понятия векторного потенциала выявится далее при изучении меняющихся во времени полей и электромагнитного излучения.

## 6.5. Поля колец и катушек

Нить с током в форме кольца радиуса  $b$  показана на рис. 6.15, *a*. Мы можем предсказать без всяких вычислений, что магнитное поле такого источника должно иметь вид, подобный изображенному на рис. 6.15, *б*, где мы начертили несколько силовых линий в плоскости, проходящей через ось симметрии. Поле в целом должно иметь вращательную симметрию относительно этой оси (ось  $z$  на рис. 6.15, *a*), а сами силовые линии должны быть симметричны относительно плоскости петли (плоскость  $xy$ ). Поле в непосредственной близости от нити с током будет напоминать поле вблизи длинного прямого провода, так как здесь относительное значение удаленных частей петли невелико.

Поле на оси легко вычислить, используя уравнение (38). Каждый элемент кольца длиной  $d\mathbf{l}$  создает вектор  $d\mathbf{B}$ , перпендикулярный к  $\mathbf{r}$ . Мы должны рассмотреть только  $z$ -компоненту  $d\mathbf{B}$ , так как нам известно, что полное поле на оси должно быть направлено вдоль нее:

$$dB_z = \frac{I dl}{cr^2} \cos \theta = \frac{I dl}{cr^2} \frac{b}{r}. \quad (40)$$