

действует только на  $1/r$ , иначе мы не могли бы воспользоваться этим правилом. Вспомним, что  $\nabla(1/r) = -\hat{r}/r^2$  (как при переходе от потенциала Кулона к полю Кулона). Таким образом,

$$d\mathbf{B} = \nabla \times \frac{I d\mathbf{l}}{cr} = -\frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \left( -\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{r}}{cr^2}. \quad (39)$$

В истории физики уравнение (38) известно как закон Био — Савара. Его смысл заключается в том, что если  $\mathbf{B}$  вычислено интегрированием по полному контуру с учетом вкладов от каждого элемента, даваемых этой формулой, то мы получим верное значение результирующего поля  $\mathbf{B}$ . Вклад части контура физически неопределим (см. сноску на стр. 201). Действительно, (38) не является единственной формулой, с помощью которой можно получить правильный результат для  $\mathbf{B}$  — к нему можно было бы добавить любую функцию, которая давала бы нуль при интегрировании по замкнутому пути.

Итак, хотя понятие о векторном потенциале оказало нам существенную помощь, казалось бы, что дальше мы можем обойтись без него. Действительно часто проще вычислить поле системы токов непосредственно, пользуясь полученным нами уравнением (38), чем определять предварительно векторный потенциал. Мы приведем в следующем разделе несколько практических примеров таких расчетов. Однако векторный потенциал важен по более глубоким причинам. Во-первых, он открыл для нас поразительную параллель в отношениях, существующих между электростатическим полем и его источниками (электрическими зарядами) и магнитным полем и источниками этого поля (токами). Величайшая польза понятия векторного потенциала выявится далее при изучении меняющихся во времени полей и электромагнитного излучения.

## 6.5. Поля колец и катушек

Нить с током в форме кольца радиуса  $b$  показана на рис. 6.15, *a*. Мы можем предсказать без всяких вычислений, что магнитное поле такого источника должно иметь вид, подобный изображенному на рис. 6.15, *б*, где мы начертили несколько силовых линий в плоскости, проходящей через ось симметрии. Поле в целом должно иметь вращательную симметрию относительно этой оси (ось  $z$  на рис. 6.15, *a*), а сами силовые линии должны быть симметричны относительно плоскости петли (плоскость  $xy$ ). Поле в непосредственной близости от нити с током будет напоминать поле вблизи длинного прямого провода, так как здесь относительное значение удаленных частей петли невелико.

Поле на оси легко вычислить, используя уравнение (38). Каждый элемент кольца длиной  $d\mathbf{l}$  создает вектор  $d\mathbf{B}$ , перпендикулярный к  $\mathbf{r}$ . Мы должны рассмотреть только  $z$ -компоненту  $d\mathbf{B}$ , так как нам известно, что полное поле на оси должно быть направлено вдоль нее:

$$dB_z = \frac{I dl}{cr^2} \cos \theta = \frac{I dl}{cr^2} \frac{b}{r}. \quad (40)$$

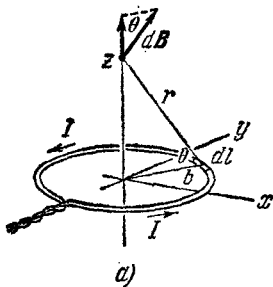
Интегрируя по всему кольцу, мы сразу получим  $\int dl = 2\pi b$ , так что поле в любой точке оси равно

$$B_z = \frac{2\pi b^2 I}{c r^3} = \frac{2\pi b^2 I}{c (b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{поле на оси}). \quad (41)$$

В центре кольца  $z=0$ , и величина поля

$$B_z = \frac{2\pi I}{cb} \quad (\text{поле в центре}). \quad (42)$$

Цилиндрическая проволочная катушка, изображенная на рис. 6.16, а, обычно называется соленоидом. Мы предполагаем, что проволока распределена плотно и равномерно, так что число витков обмотки на сантиметр длины вдоль цилиндра является величиной постоянной и равной  $n$ . Таким образом, в действительности ток идет по



спирали, но если витков много и они расположены плотно друг к другу, мы можем этим пренебречь и рассматривать соленоид как совокупность колец с током. Тогда мы можем взять уравнение (41) за основу для вычисления поля в любой точке, например в точке  $z$  на оси катушки. Рассмотрим сначала вклад кольца с током, расположенного между радиусами, проведенными из точки  $z$  и образующими с осью  $z$  углы от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ . Длина этого участка соленоида, выделенного на рис. 6.16, б, равна  $rd\theta/\sin\theta$ , и поэтому он эквивалентен кольцу с током, равным  $Inr d\theta/\sin\theta$ . Так как  $r = b/\sin\theta$ , это кольцо дает следующий вклад в поле на оси:

$$dB_z = \frac{2\pi b^2}{c r^3} \frac{Inr d\theta}{\sin\theta} = \frac{2\pi In}{c} \sin\theta d\theta. \quad (43)$$

Интегрирование в пределах от  $\theta_1$  до  $\theta_2$  дает

$$B_z = \frac{2\pi In}{c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{2\pi In}{c} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2). \quad (44)$$

Мы воспользовались уравнением (44), чтобы построить график зависимости поля от положения на оси катушки (рис. 6.17), длина которой в четыре раза больше ее диаметра. По оси ординат отложено отношение величины поля  $B_z$  к величине поля в катушке бесконечно

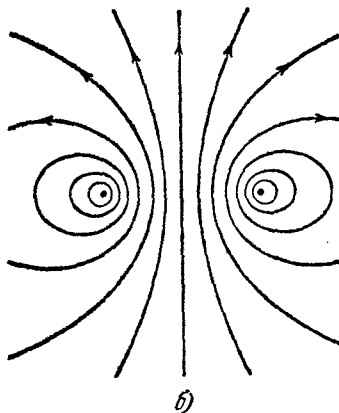


Рис. 6.15. Магнитное поле кольца с током. а) Вычисление поля на оси. б) Некоторые силовые линии поля.

поля от положения на оси катушки (рис. 6.17), длина которой в четыре раза больше ее диаметра. По оси ординат отложено отношение величины поля  $B_z$  к величине поля в катушке бесконечно

большой длины с тем же количеством витков на сантиметр и с той же силой тока в каждом витке. Для бесконечно длинной катушки  $\theta_1=0$ , а  $\theta_2=\pi$ ; таким образом,

$$B_z = \frac{4\pi In}{c} \quad (\text{соленоид бесконечно большой длины}). \quad (45)$$

В центре катушки «четыре к одному» поле весьма близко к этой

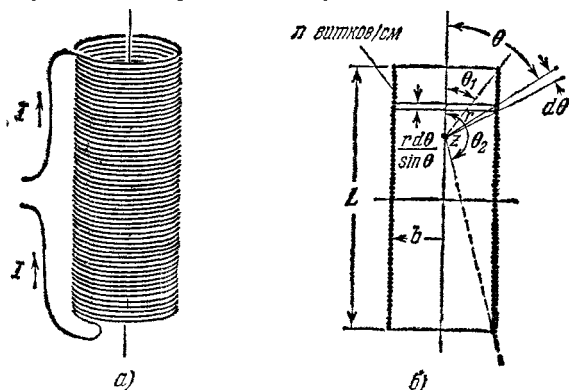


Рис. 6.16. а) Соленоид. б) Вычисление поля на оси соленоида.

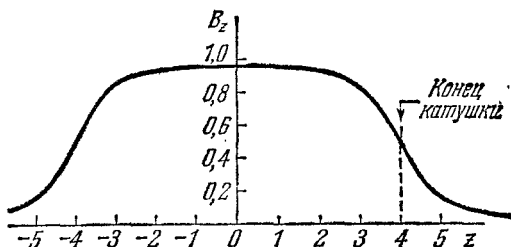


Рис. 6.17. Поле  $B_z$  на оси соленоида, показанного на рис. 6.16,  $z$  — расстояние вдоль оси, выраженное в радиусах катушки.

величине и остается почти постоянным, пока мы не приблизимся к одному из концов.

На рис. 6.18 изображены линии магнитного поля внутри и вне катушки с такими пропорциями. Заметьте, что некоторые силовые линии действительно проходят через обмотку. Цилиндрический слой тока служит поверхностью разрыва для магнитного поля. Конечно, если бы нас интересовало поле в непосредственной близости от проводов, мы встретились бы не с бесконечно крутыми перегибами, а с очень сложными волнистыми путями силовых линий вокруг отдельных проводов и сквозь них.

Вполне возможно сделать длинный соленоид, состоящий из единственного витка тонкого широкого проводника в виде ленты, как

на рис. 6.19. Для такого соленоида полностью годятся наши вычисления и диаграмма на рис. 6.18, но величину  $nI$  надо заменить током на сантиметр, текущим в ленте. Изменение же направления линии поля, проходящей сквозь стенку, происходит исключительно в толще ленты, как показано на увеличенной части рис. 6.19.

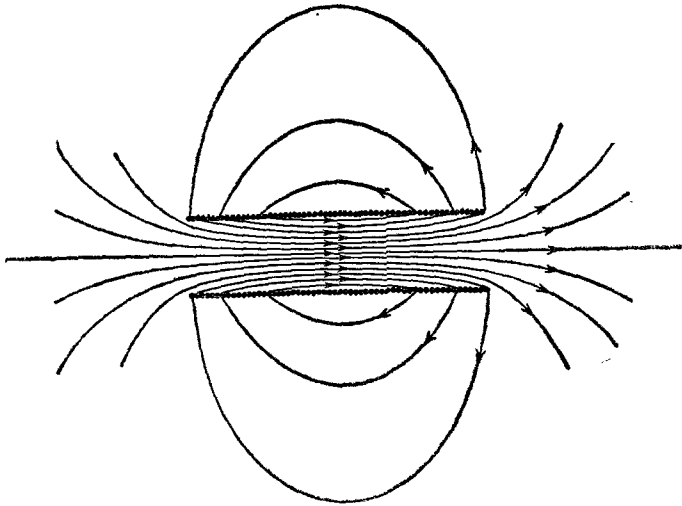


Рис. 6.18. Силовые линии поля внутри и вокруг соленоида.

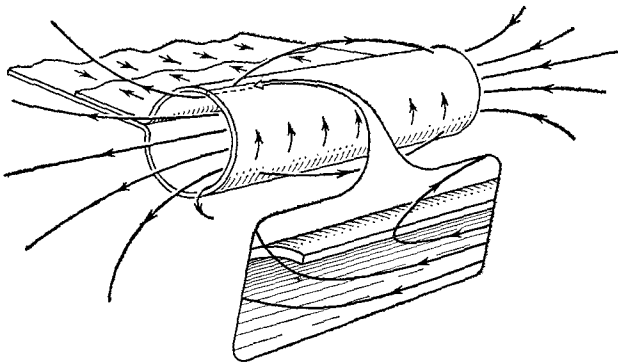


Рис. 6.19. Соленоид, изготовленный из целого проводящего листа, свернутого в цилиндр. В увеличенном масштабе показано, что линии поля меняют направление внутри проводника с током.

Мы могли бы найти поле бесконечно длинного соленоида, не делая вычислений, приведших к уравнению (45). Очевидно, что в бесконечно длинном соленоиде ничего не изменяется с изменением  $z$ -координаты в направлении оси. Поле должно быть везде параллельно оси  $z$ . Рассмотрим линейный интеграл от  $\mathbf{B}$  по прямоуголь-

ному пути, подобному пути  $ABCD$  на рис. 6.20. Горизонтальные стороны не вносят ничего. Сторона  $CD$  тоже ничего не должна вносить, так как если линейный интеграл по  $CD$  имеет конечную величину, то интеграл вдоль любой другой такой же линии, как, например,  $C'D'$ , имел бы такую же величину и мы получили бы магнитное поле постоянной интенсивности, заполняющее все пространство вне катушки.

Мы приходим к заключению, что поле вне катушки должно быть равно нулю\*). Остается только линейный интеграл от  $\mathbf{B}$  вдоль  $AB$ , который равен  $B_z l$ , и полный линейный интеграл должен быть равен величине  $4\pi/c$ , умноженной на охватываемый контуром ток. Следовательно,  $B_z l = (4\pi/c)nIl$  или  $B_z = 4\pi nI/c$  в соответствии с (45).

### 6.6. Изменение поля $\mathbf{B}$ вблизи листа с током

На рис. 6.19 изображен соленоид в виде изогнутой по окружности ленты с током. Рассмотрим еще более простой пример, а именно плоский неограниченный лист с током. Это может быть медный лист равномерной толщины, в котором ток постоянной плотности и направления течет во всех точках внутри металла. Для того чтобы задать направление, расположим лист в плоскости  $xz$  и заставим ток течь в направлении оси  $x$ . Так как выбранный лист бесконечно велик и не имеет краев, его трудно изобразить. Мы покажем лишь вырезанный участок листа на рис. 6.21; остальную часть листа, распространяющуюся на всю плоскость, вы должны себе представить. Толщина листа, в конце концов, не имеет большого значения, но можно предположить, что она имеет конечную величину  $t$ . Если плотность тока внутри металла равна  $J$  (ед.  $\text{СГСЭ}_q/\text{сек}/\text{см}^2$ ), тогда каждый сантиметр высоты в направлении оси  $z$  включает ленточку тока, равную  $Jt$  (ед.  $\text{СГСЭ}_q/\text{сек}$ ). Мы назовем эту величину «поверхностной плотностью» тока, или «ленточной плотностью» тока, и применим обозначение  $\mathcal{J}$  для того, чтобы отличить ее от объемной плотности тока  $\mathbf{J}$ . Единицей  $\mathcal{J}$  является (ед.  $\text{СГСЭ}_q/\text{сек}$ )/ $\text{см}$ . Если нас не интересует то, что происходит внутри самого листа, то  $\mathcal{J}$  является полезной величиной.

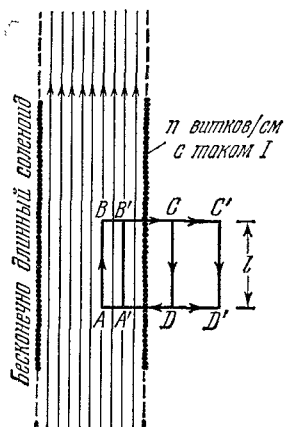


Рис. 6.20. Рисунок показывает, почему поле вне бесконечно длинного соленоида равно нулю.

\*) Почему такой соленоид не создает однородного поля во всем пространстве снаружи? Ведь бесконечно длинная плоская лента с током, которую мы будем рассматривать, имеет однородное поле, заполняющее половину пространства по обеим ее сторонам. Однако соленоид можно сделать сколь угодно тонким, и было бы действительно странно, если бы соленоид исчезающе малого диаметра мог создать везде поле конечной силы. Может быть, вам удастся придумать более подходящее объяснение.