включив провод параллельно L и R, как показано на рис. 7.25, *а*, и отключив одновременно батарею. Наш контур теперь описывается уравнением

$$0 = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{65}$$

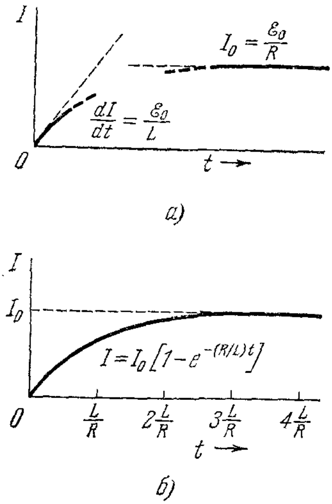

Рис. 7.24. *а*) Характер изменения тока в начале и через очень большой промежуток времени. *б*) Изменение тока во времени в контуре рис. 7.23.

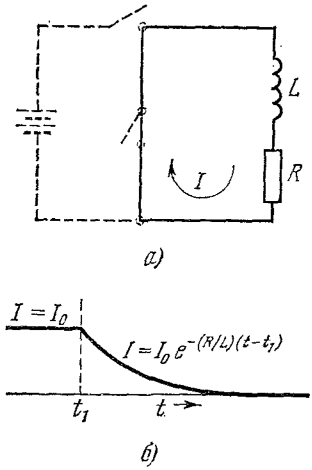

Рис. 7.25. *а*) Контур LR. *б*) Экспоненциальное спадание тока в контуре LR.

с начальным условием $I = I_0$ при $t = t_1$, где t_1 является моментом времени, когда происходит выключение батареи. Решением этого уравнения является просто экспоненциально спадающая функция:

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)} \tag{66}$$

с той же постоянной времени, L/R, что и прежде.

7.10. Энергия, запасенная в магнитном поле

Во время уменьшения тока, заданного уравнением (66) и показанного на рис. 7.25, *б*, энергия рассеивается в сопротивлении R. Так как энергия dU, рассеянная за короткий интервал времени dt, равна RI^2dt, то полная энергия, рассеянная после замыкания ключа в момент времени t_1, должна быть равна

$$U = \int_{t_1}^{\infty} RI^2\,dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0^2 e^{-(2R/L)(t-t_1)}dt. \tag{67}$$

Сделав подстановку $x = 2R(t - t_1)/L$, легко получить

$$U = RI_0^2\left(\frac{L}{2R}\right)\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}LI_0^2. \tag{68}$$

Источником этой энергии является индуктивность с ее магнитным полем. Действительно, эта энергия равна работе, которую должна произвести батарея при включении, чтобы создать текущий в цепи ток. Разумеется, за время от $t=0$ до $t=t_1$, после включения батареи некоторая энергия рассеивается в сопротивлении, и эта энергия также поставляется батареей. Выражение (68) имеет общий характер. Действительно, если ток в индуктивности увеличивается, то должна быть произведена работа, чтобы заставить ток течь в направлении, противоположном индуцированной электродвижущей силе $L\frac{dI}{dt}$. Поэтому работа, произведенная за время dt, равна

$$dW = LI\frac{dI}{dt}\,dt = LI\,dI = \frac{1}{2}L\,d(I^2). \qquad (69)$$

Следовательно, мы можем считать, что энергия

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (70)$$

запасена в индуктивности с током I. Если ток исчезает, это количество энергии должно появиться где-то в другом месте.

Естественно считать, что эта энергия запасена в магнитном поле индуктивности, так же как энергия заряженного конденсатора запасена в его электрическом поле. Энергия конденсатора, заряженного до разности потенциалов V, равна $^1/_2CV^2$ и складывается из энергий элементов объема dv, находящихся в электрическом поле E; таким образом, энергия каждого элемента объема равна $(1/8\pi)\,E^2dv$. Приятной неожиданностью является то, что такое же выражение справедливо и для энергии, запасенной в индуктивности. Иными словами, если мы примем плотность энергии магнитного поля равной $(1/8\pi)\,B^2$, то, суммируя энергию всех элементов объема нашего поля, получим для полной энергии величину $LI^2/2$.

Чтобы показать это на примере, вернемся к тороидальной катушке, индуктивность L которой мы вычисляли в разделе 7.8. Мы нашли (уравнение (58)), что

$$L = \frac{2N^2h}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (71)$$

Напряженность магнитного поля B при токе I была равна

$$B = \frac{2NI}{cr}. \qquad (72)$$

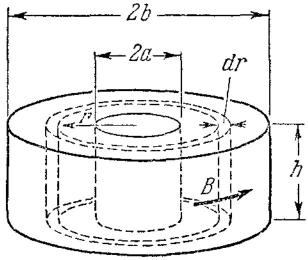

Рис. 7.26. Вычисление энергии, запасенной в магнитном поле тороидальной катушки рис. 7.22.

Для вычисления объемного интеграла от $B^2/8\pi$ мы можем взять элемент объема в виде цилиндрического слоя, изображенного на рис. 7.26; его объем равен $2\pi rhdr$. Радиус этого слоя изменяется от $r=a$ до $r=b$, поэтому интегрирование происходит по всему пространству, содержащему магнитное поле. (Вспомните, что поле B равно нулю всюду, кроме сечения катушки.)

$$\frac{1}{8\pi}\int B^2\,dv=\frac{1}{8\pi}\int\limits_a^b\left(\frac{2NI}{cr}\right)^2 2\pi rh\,dr=\frac{N^2hI^2}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (73)$$

Сравнивая этот результат с уравнением (71), мы видим, что, действительно,

$$\frac{1}{8\pi}\int B^2\,dv=\frac{1}{2}LI^2. \qquad (74)$$

Наиболее общее утверждение, аналогичное сделанному для электрического поля в уравнении (1.36), состоит в том, что энергия U, связанная с любым магнитным полем $B(x, y, z)$, дается выражением

$$\boxed{U=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{полю}}} B^2\,dv.} \qquad (75)$$

Если B измерено в гауссах и v — в кубических сантиметрах, то U в уравнении (75) выражена в эргах. В уравнении (70) мы можем применить практические единицы, генри и амперы для L и I, и тогда U выразится в джоулях.

7.11. «Что-то потеряно»

Вспомним уравнения, связывающие заряды и поля. В гл. 2 мы узнали, что выражением, эквивалентным закону Кулона, является дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho, \qquad (76)$$

связывающее плотность электрического заряда ρ и электрическое поле $\mathbf{E}$. Это уравнение справедливо как для движущихся, так и для неподвижных зарядов. Иными словами, ρ является функцией времени и положения. Как было подчеркнуто в гл. 5, факт справедливости уравнения (76) для движущихся зарядов согласуется с *инвариантностью заряда*. Заряд изолированной частицы, определенный интегралом от $\mathbf{E}$ по окружающей ее поверхности, одинаков в любой системе координат, независимо от способа движения частицы.

Движущийся электрический заряд является электрическим током. Поскольку заряд никогда не создается и не исчезает, то плотность заряда ρ и плотность тока $\mathbf{J}$ всегда удовлетворяют условию

$$\operatorname{div}\mathbf{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}. \qquad (77)$$

Мы познакомились с этим «уравнением непрерывности» в гл. 4 (уравнение (4.9)).