магнитное поле. (Вспомните, что поле B равно нулю всюду, кроме сечения катушки.)

$$\frac{1}{8\pi}\int B^2\,dv = \frac{1}{8\pi}\int_a^b \left(\frac{2NI}{cr}\right)^2 2\pi r h\,dr = \frac{N^2 h I^2}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{73}$$

Сравнивая этот результат с уравнением (71), мы видим, что, действительно,

$$\frac{1}{8\pi}\int B^2\,dv = \frac{1}{2}LI^2. \tag{74}$$

Наиболее общее утверждение, аналогичное сделанному для электрического поля в уравнении (1.36), состоит в том, что энергия U, связанная с любым магнитным полем $B(x, y, z)$, дается выражением

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{полю}}} B^2\,dv.} \tag{75}$$

Если B измерено в гауссах и v — в кубических сантиметрах, то U в уравнении (75) выражена в эргах. В уравнении (70) мы можем применить практические единицы, генри и амперы для L и I, и тогда U выразится в джоулях.

7.11. «Что-то потеряно»

Вспомним уравнения, связывающие заряды и поля. В гл. 2 мы узнали, что выражением, эквивалентным закону Кулона, является дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{76}$$

связывающее плотность электрического заряда ρ и электрическое поле $\mathbf{E}$. Это уравнение справедливо как для движущихся, так и для неподвижных зарядов. Иными словами, ρ является функцией времени и положения. Как было подчеркнуто в гл. 5, факт справедливости уравнения (76) для движущихся зарядов согласуется с *инвариантностью заряда.* Заряд изолированной частицы, определенный интегралом от $\mathbf{E}$ по окружающей ее поверхности, одинаков в любой системе координат, независимо от способа движения частицы.

Движущийся электрический заряд является электрическим током. Поскольку заряд никогда не создается и не исчезает, то плотность заряда ρ и плотность тока $\mathbf{J}$ всегда удовлетворяют условию

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{77}$$

Мы познакомились с этим «уравнением непрерывности» в гл. 4 (уравнение (4.9)).

Если плотность тока **J** постоянна во времени, мы называем ее плотностью постоянного тока. Магнитное поле стационарного тока удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \tag{78}$$

Это выражение применялось в гл. 6.

Займемся теперь плотностями зарядов и полями, изменяющимися во времени. Предположим, что мы имеем распределение заряда $\rho(x, y, z, t)$ с $\partial\rho/\partial t \neq 0$. Можно взять, например, конденсатор, разряжающийся через сопротивление. Согласно уравнению (77), $\partial\rho/\partial t \neq 0$ означает, что

$$\operatorname{div} \mathbf{J} \neq 0. \tag{79}$$

Но так как дивергенция ротора любой векторной функции тождественно равна нулю (см. задачу 2.15), мы получаем из (78), что

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0. \tag{80}$$

Из этого противоречия следует, что уравнение (78) не может быть верным для системы, в которой плотность заряда меняется во времени. Конечно, никто не требует этого; в случае постоянного тока, для которого уравнение (78) справедливо, ни плотность тока **J**, ни плотность заряда ρ не зависят от времени.

Задачу можно поставить несколько иначе, если рассмотреть линейный интеграл магнитного поля вокруг провода, переносящего заряд от одной пластины конденсатора к другой, как на рис. 7.27. Согласно теореме Стокса

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \tag{81}$$

Поверхность S проходит через проводник, в котором течет ток I. Внутри этого проводника rot **B** имеет конечное значение, а именно $4\pi\mathbf{J}/c$, и интеграл справа получается равным $4\pi I/c$.

Таким образом, можно сказать, что если кривая C расположена близко к проводу и на некотором расстоянии от зазора конденсатора, то магнитное поле там не отличается от поля вокруг провода с таким же током. Поверхность S' на рис. 7.28 также стягивает C и имеет равные права на участие в теореме Стокса (81). Однако через эту поверхность не течет никакого тока! Тем не менее rot **B** не может быть равен нулю по всей поверхности S' без нарушения теоремы Стокса. Следовательно, на поверхности S' rot **B** должен зависеть от чего-нибудь другого, а не от плотности тока **J**.

Отсюда следует, что уравнение (78) должно быть заменено каким-то другим выражением, подходящим для более сложного случая, когда происходит изменение распределения зарядов. Напишем вместо уравнения (78)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c} + (?) \tag{82}$$

и посмотрим, сможем ли мы найти, что представляет собой (?).

Ответ вытекает из общих свойств электромагнитного поля. Вспомните, что законы преобразования поля (уравнения (6.58)) совершенно симметричны в отношении **E** и **B**. В явлении индукции Фарадея переменное магнитное поле оказывается связанным с электрическим полем, и эта связь описывается уравнением (30):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{30}$$

Локальное соотношение (30) связывает электрическое и магнитное поля в пустом пространстве, не содержащем зарядов.

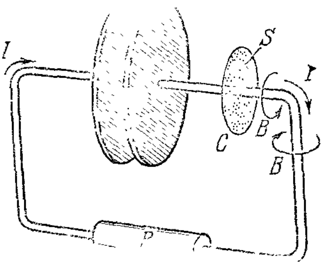

Рис. 7.27. Конденсатор с положительно заряженной правой пластиной разряжается через сопротивление. Вокруг провода создается магнитное поле **B**. Интеграл от ротора **B** по поверхности S, которая пересекает провод, равен $4\pi I/c$.

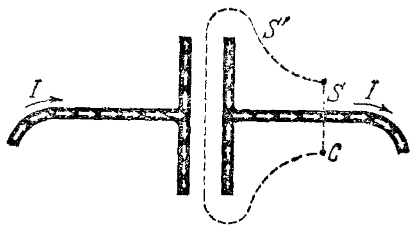

Рис. 7.28. Белыми стрелками показан ток в проводниках. Через поверхность S', которая, так же как и S, ограничена кривой C, ток не течет.

Если в отношении **E** и **B** существует симметрия, следует ожидать, что переменное электрическое поле будет вызывать магнитное поле. Это означает существование явления индукции, описываемого уравнением, подобным уравнению (30), но с **E** и **B**, поменявшимися местами. Оказывается, что в таком уравнении следует изменить знак, но этим все и ограничивается:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{83}$$

Это поможет получить недостающий член для уравнения (82). Чтобы найти его, напишем

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{84}$$

и возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{B}) = \operatorname{div}\left(\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right). \tag{85}$$

Левая часть должна быть тождественно равна нулю, как показано выше. Во втором члене справа мы можем переменить порядок дифференцирования по пространственным координатам и по времени. Таким образом,

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{E})=\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{86}$$

согласно уравнению (76). Правая часть уравнения (85) имеет теперь вид

$$\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{J}+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{87}$$

и равна нулю благодаря уравнению непрерывности (уравнение (77)).

Новый член устраняет трудность, возникшую в ситуации, изображенной на рис. 7.28. Так как заряд вытекает из конденсатора, величина электрического поля, конфигурация которого для любого

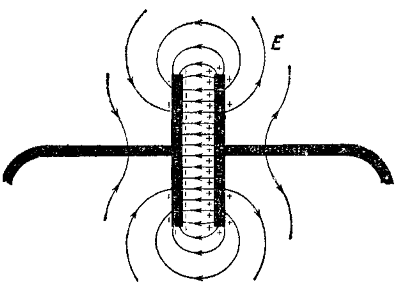

Рис. 7.29. Электрическое поле в определенный момент времени. Величина поля **E** всюду уменьшается со временем.

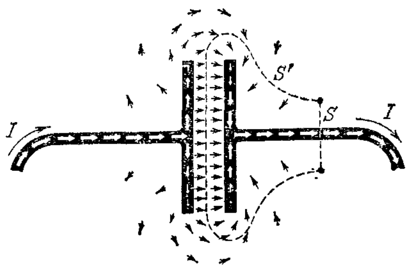

Рис 7.30. Ток проводимости (белые стрелки) и ток смещения (черные стрелки).

момента времени показана на рис. 7.29, уменьшается. В этом случае вектор $\partial\mathbf{E}/\partial t$ направлен в сторону, противоположную **E**. Векторная функция $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ на рис. 7.30 изображена черными стрелками. Так как $\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, то интеграл от $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ по поверхности S' равен теперь той же величине, что и по поверхности S. На поверхности S' весь вклад создается вторым членом; на поверхности S практически имеет значение только первый член, т. е. член с плотностью **J**.

7.12. Ток смещения

Обратите внимание на то, что векторное поле $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ появляется для того, чтобы продолжить ток проводимости. Максвелл назвал его *током смещения*, и название осталось, несмотря на то, что теперь оно кажется не очень подходящим. Чтобы быть точными, мы можем определить «плотность тока смещения» $\mathbf{J}_{\text{см}}$, которую следует отличать от плотности тока проводимости **J**, написав уравнение (84)