

7.13. Уравнения Максвелла

После того как Джеймс Кларк Максвелл познакомился с работами Фарадея, он решил придать теории электричества и магнетизма математическую форму. Максвелл не мог воспользоваться теорией относительности, так как она появилась лишь через пятьдесят лет. Электрические свойства материи были еще тайной и связь между светом и электромагнетизмом не подозревалась. Многие из доводов, которыми мы пользовались при обобщении наших результатов, были немыслимы во времена Максвелла. Тем не менее, когда Максвелл развил свою теорию, член $\partial \mathbf{E} / \partial t$, обсуждавшийся нами, появился в ней вполне естественно. Максвелл назвал его «током смещения». Максвелл занимался электрическими полями не только в вакууме, но и в твердых телах, и когда он говорит о токе смещения, он часто имеет в виду также движущиеся заряды. Это обстоятельство разъясняется в гл. 9 при изучении электрических полей в веществе. Действительно, Максвелл считал само пространство некоторой средой, «эфиром», поэтому ток смещения всегда протекал в чем-то, даже при отсутствии вещества. Но его математические уравнения совершенно ясны и недвусмысленны, и открытие им тока смещения является теоретическим открытием первостепенной важности.

Максвелл дал совершенно полную картину электромагнитного поля. В различных главах книги мы рассматривали отдельные детали этой картины. Здесь мы покажем всю картину в виде системы уравнений, называемых по традиции *уравнениями Максвелла*:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Они написаны для полей в вакууме, при наличии электрического заряда с плотностью ρ и электрического тока с плотностью \mathbf{J} , вызванных движением зарядов.

Первое уравнение представляет собой *закон индукции Фарадея*. Второе выражает зависимость магнитного поля от плотности тока смещения (т. е. от скорости изменения электрического поля) и от плотности тока проводимости (т. е. от скорости движения заряда). Третье уравнение эквивалентно закону Кулона. Четвертое уравнение утверждает, что нет других источников магнитного поля, кроме токов. Эту загадку природы мы рассмотрим более подробно в гл. 10.

Обратите внимание, что отсутствие симметрии между \mathbf{B} и \mathbf{E} в этих уравнениях обусловлено исключительно наличием электрического заряда и электрического тока проводимости. В простран-

стве, свободном от зарядов, члены, содержащие ρ и \mathbf{J} , равны нулю, и уравнения Максвелла имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Член с током смещения имеет здесь первостепенную важность. Его присутствие рядом с его двойником в первом уравнении означает возможность появления *электромагнитных волн*. Понимание этого обстоятельства позволило Максвеллу с блестящим успехом развить электромагнитную теорию света.

Вы будете детально изучать физику волн и световые волны в т. III. Можно показать и сейчас, что уравнения Максвелла позволяют получить электромагнитное возмущение, распространяющееся со скоростью c . Для этого мы рассмотрим несколько очень простых электрических и магнитных полей, представляющих собой распространяющееся возмущение, и покажем, что эти поля удовлетворяют всем уравнениям (91).

Предположим, что в некоторый момент времени $t=0$ в области между плоскостями $y=0$ и $y=2a$ имеется электрическое поле. Это электрическое поле имеет лишь z -компоненту, которая зависит только от y следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_0 \frac{y}{a} & (0 \leq y \leq a), \\ E_z &= E_0 \left(\frac{2a-y}{a} \right) & (a \leq y \leq 2a) \end{aligned} \right\} \quad (\text{при } t=0). \quad (92)$$

На рис. 7.33, *a* изображено «крышеобразное» распределение поля, с максимумом в центре при $y=a$ и линейно спадающее к нулю при $y=0$ и $y=2a$. Для заданного y поле имеет одинаковую величину для всех x и z . Иными словами, электрическое поле занимает бесконечно большую часть пространства, хотя на рисунке показаны векторы поля только по оси y . Участки, обозначенные цифрами I и II, расположены внутри этой «крышеобразной» части поля.

Всюду вне «крыши», т. е. для $2a < y < 0$, электрическое поле в этот момент времени равно нулю. В то же время в этой «крыше» существует магнитное поле \mathbf{B} . Оно имеет только x -компоненту, выражаемую уравнениями

$$\left. \begin{aligned} B_x &= B_0 \frac{y}{a} & (0 \leq y \leq a), \\ B_x &= B_0 \left(\frac{2a-y}{a} \right) & (a \leq y \leq 2a) \end{aligned} \right\} \quad (\text{при } t=0). \quad (93)$$

Мы просто выдумали это поле. Заставим теперь всю конфигурацию поля передвигаться в направлении оси y со скоростью c , сохраняя форму.

Это можно сделать при следующих условиях:

Область I:

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \left(\frac{y-ct}{a} \right), \\ B_x &= B_0 \left(\frac{y-ct}{a} \right) \end{aligned} \quad (ct \leq y \leq ct+a). \quad (94)$$

Область II:

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \left(\frac{2a-y+ct}{a} \right), \\ B_x &= B_0 \left(\frac{2a-y+ct}{a} \right) \end{aligned} \quad (ct+a \leq y \leq ct+2a). \quad (95)$$

Эти уравнения описывают ситуацию, изображенную на рис. 7.33, б в любой момент времени t . Область поля просто сместилась вправо на расстояние ct . Внутри областей I и II как \mathbf{E} , так и \mathbf{B}

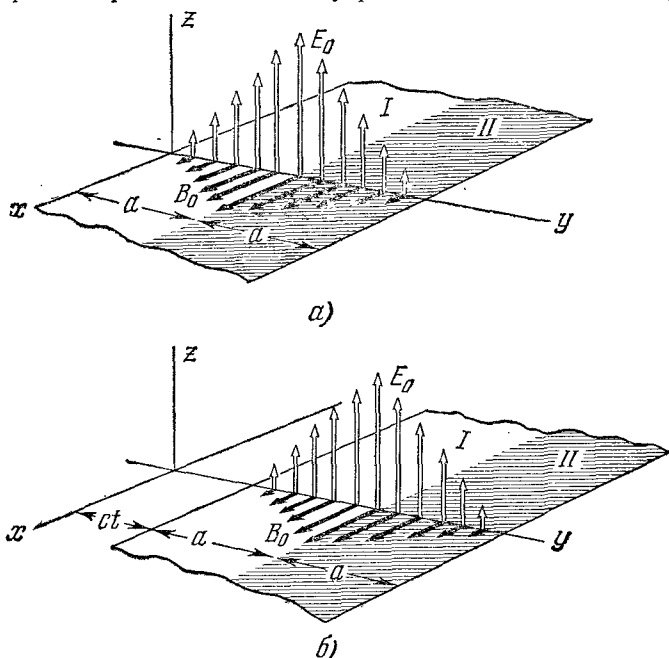


Рис. 7.33. Частный случай электрического и магнитного полей, движущихся со скоростью c в направлении оси y . Поля показаны в момент времени $t=0$ (а) и несколько позже, во время t (б). Эти поля будут удовлетворять уравнениям Максвелла, если $B_0=E_0$. Обратите внимание на относительную ориентацию \mathbf{E} , \mathbf{B} и направления распространения \hat{y} .

имеют ту же форму, что и прежде. Следовательно, наши уравнения описывают движущуюся конфигурацию электрического и магнитного полей, но могут ли существовать такие поля? Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы должны проверить, удовлетворяют ли \mathbf{E} и \mathbf{B} , выраженные уравнениями (94) и (95), уравнениям Максвелла.

Начиная с уравнений для дивергенции, легко показать, что $\text{div } \mathbf{E}=0$ и $\text{div } \mathbf{B}=0$. (Очевидно, что $\partial E_z/\partial z$ и другие компоненты \mathbf{E}

равны нулю.) Но $\text{rot } \mathbf{E}$ не равен нулю. Его величина выражается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{В области } I: \quad \nabla \times \mathbf{E} &= \hat{x} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{E_0}{a} \hat{x}, \\ \text{В области } II: \quad \nabla \times \mathbf{E} &= \hat{x} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{E_0}{a} \hat{x}. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Таким же образом вычисляется $\nabla \times \mathbf{B}$:

$$\left. \begin{aligned} \text{В области } I: \quad \nabla \times \mathbf{B} &= -\hat{z} \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{B_0}{a} \hat{z}, \\ \text{В области } II: \quad \nabla \times \mathbf{B} &= -\hat{z} \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{B_0}{a} \hat{z}. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Частные производные по t равны:

$$\left. \begin{aligned} \text{В области } I: \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{c}{a} E_0 \hat{z}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c}{a} B_0 \hat{x}, \\ \text{В области } II: \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{c}{a} E_0 \hat{z}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{a} B_0 \hat{x}. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Поля будут удовлетворять уравнениям «индукции» в области I , если

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_0}{a} \hat{x} &= -\frac{1}{c} \left(-\frac{c}{a} B_0 \hat{x} \right) \\ \text{и} \\ -\frac{B_0}{a} \hat{z} &= \frac{1}{c} \left(-\frac{c}{a} E_0 \hat{z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Чтобы это было возможно, необходимо положить $E_0 = B_0$. Точно такие же требования предъявляются уравнениями к полям в области II . В самой верхней точке «крыши», а также у ее концов в описываемых полях имеются математические особенности. Для полной уверенности в том, что уравнения полей удовлетворяются в $с$ ю д у, мы должны знать, что в этих точках все в порядке. Поскольку \mathbf{E} и \mathbf{B} в этих точках непрерывны, основания для беспокойства нет. (Резкого скачка, или разрыва функций \mathbf{E} и \mathbf{B} , в пустом пространстве быть не может.) Следовательно, рассматриваемый нами частный случай электромагнитного поля, представляющий собой распространенную волну, удовлетворяет всем уравнениям поля, если электрическое поле, измеряемое в единицах $\text{ГСЭВ}/\text{см}$, равно величине магнитного поля, измеряемого в гауссах, в данный момент времени в данной точке пространства. Существенно, чтобы \mathbf{E} и \mathbf{B} были взаимно перпендикулярны и перпендикулярны \hat{k} направлению движения, — в противном случае уравнение поля не могло бы быть удовлетворено.

Наша движущаяся «крыша» может удивить вас своей искусственностью. Однако этот простой пример характерен для любой плоской электромагнитной волны! Мы должны только подумать о суперпозиции. Как неоднократно подчеркивалось, уравнения электромагнитного поля являются линейными. Если два каких-

нибудь поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к их сумме. В пространстве может двигаться любое количество «крышеобразных» полей в одном или в различных направлениях. (Для полей, естественно, безразлична ориентация осей — любое другое направление для них так же приемлемо, как направление оси y .) На рис. 7.34 изображены некоторые волны, которые могут получиться из «крышеобразных». Совершенно очевидно, что любую функцию можно получить с требуемой степенью приближения с помощью суперпозиции «крыш».

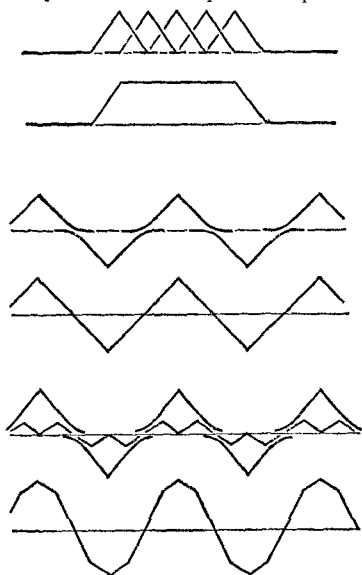


Рис. 7.34. Различные волны, полученные путем суперпозиции волн, имеющих форму «крыша».

Следовательно, все, что мы узнали о «крышеобразной» волне, должно быть применимо к любой волне, где \mathbf{E} и \mathbf{B} зависят только от координаты, вдоль которой происходит ее распространение. Эти общие положения состоят в следующем:

а) Возмущение распространяется со скоростью c , без изменения формы.

б) \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны друг к другу и к направлению распространения возмущения, причем направление вектора $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ всегда совпадает с направлением распространения, как в нашем примере.

в) В заданной точке и в определенное время $E = B$. При переходе к другим системам координат электромагнитное поле с такими свой-

ствами преобразуется чрезвычайно просто. В гл. 6 были выведены формулы для лоренцевского преобразования электрических и магнитных полей (см. (6.58)). Используем результаты задачи 6.11, согласно которым две скалярные величины $E^2 - B^2$ и $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ инвариантны относительно преобразования к другой инерциальной системе координат. В нашем случае в любой точке $E = B$ и инвариантная величина $E^2 - B^2$ равна нулю. Вторая инварианта $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ также равна нулю, потому что вектор \mathbf{E} перпендикулярен к вектору \mathbf{B} . Следовательно, в любой системе координат преобразованные поля \mathbf{E}' и \mathbf{B}' должны быть равны по величине и направлены перпендикулярно друг другу. Световая волна в любой системе координат остается световой волной.

Задачи

7.1. Чему равна максимальная величина электродвижущей силы, индуцированной в катушке с 4000 витками и средним радиусом 12 см, которая вращается со скоростью 30 об/сек в магнитном поле Земли величиной 0,5 гс? Ответ. 1,70 в.

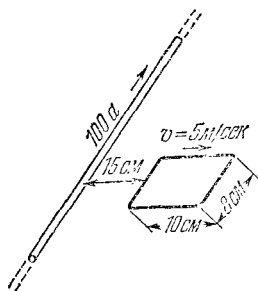
7.2. Рамка движется в однородном магнитном поле таким образом, что электродвижущая сила всегда равна нулю. По каким путям может двигаться рамка?

7.3. Связь между изменением потока и переносом заряда. Круглая катушка с N витками и с площадью сечения A , расположена в поле магнита и присоединена к внешнему контуру парой проводников. Сопротивление контура, включая саму катушку, равно R . Предположим, что поток через катушку изменяется каким-то образом от первоначальной постоянной величины Φ_1 до конечной постоянной величины Φ_2 . Покажите, что полный заряд Q , проходящий через контур, не зависит в конечном результате от скорости изменения потока. Такая катушка называется «поворотной катушкой» и применяется для измерения магнитного поля. Пусть плоскость катушки перпендикулярна B . Какова связь между B , NA , R и Q , если катушка поворачивается на 90° ? На 180° ? Ответ.

$$Q = \frac{NAB}{cR}, \quad Q = \frac{2NAB}{cR}.$$

7.4. Вычислите электродвижущую силу в движущейся рамке в тот момент, когда она находится в положении, показанном на рисунке. Предположите, что сопротивление рамки так велико, что влиянием тока в самой рамке можно пренебречь. Оцените, при каком сопротивлении рамки такое пренебрежение возможно. Укажите направление тока в рамке на рисунке. Ответ. $E = 2,13 \cdot 10^{-5} \text{ в}$.

7.5. Рамка, изображенная на рис. 7.6, имеет сопротивление R . Покажите, что работа, затраченная за время dt на передвижение рамки с постоянной скоростью, равна энергии, рассеянной в сопротивлении за этот же промежуток времени, если самоиндукцией рамки можно пренебречь. Каков источник энергии на рис. 7.14, где рамка неподвижна?



К задаче 7.4.

7.6. Ответьте, зависит ли предсказание о простом синусоидальном изменении электродвижущей силы для вращающейся петли на рис. 7.13 от того, что петля имеет прямоугольную форму, или от того, что магнитное поле однородно, или это вызвано действием обеих причин? Объясните это. Можете ли вы предложить установку с вращающейся петлей и неподвижными катушками, которая давала бы несинусоидальную э. д. с.? Начертите кривую разность потенциалов — время, которая получилась бы на осциллографе в такой установке.

7.7. Вычислите самоиндукцию цилиндрического соленоида, диаметром 10 см и длиной 2 м, если он имеет однослойную обмотку, содержащую 1200 витков. Предположите в первом приближении, что магнитное поле внутри соленоида однородно по всей его длине. Приблизительно оцените величину обмотки, которую вы при этом вносите. Будет ли истинная самоиндукция L больше или меньше вашего приближенного результата? Ответ. $L = 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ гн}$.

7.8. Как намотать катушку сопротивления, чтобы ее самоиндукция была мала?

7.9. Выведите приближенную формулу для взаимной индуктивности двух колец одинакового радиуса a , расположенных, подобно колесам, на одной оси при расстоянии между центрами, равном b см. Используйте приближение, пригодное для $b \gg a$. Ответ. $M = 2\pi^2 \cdot 10^{-9} a^4/b^3 \text{ гн}$.

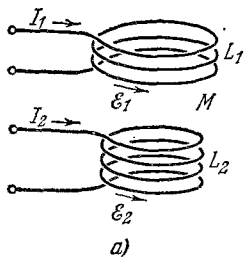
7.10. Взаимная индуктивность в историческом аспекте. Описанные Фарадеем катушки, впервые давшие слабый, но заметный толчок стрелке гальванометра, состояли каждая из 61 м медной проволоки, намотанной на большой кусок дерева. Витки второй спирали (однослойная катушка) были расположены между витками первой, но отделены от них шнурком. Диаметр медной проволоки равнялся 1,25 мм. Фарадей не указал ни размеров деревянной болванки, ни числа витков на катушках. В опыте одна из этих катушек была соединена с «батареей, состоящей из 100 пластин». Попытайтесь приблизительно оценить продолжительность (в секундах) и величину (в амперах) импульса тока, который проходил через гальванометр в опыте Фарадея.

7.11. Полная индуктивность последовательно включенных катушек и общее правило относительно L и M . На рис. а изображены две катушки с самоиндукциями

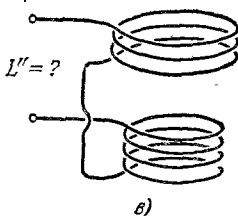
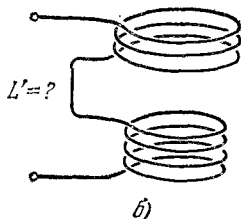
L_1 и L_2 ; их взаимная индуктивность равна M . Положительные направления тока и электродвижущей силы в каждой катушке указаны стрелками. Уравнения, связывающие токи и электродвижущие силы, имеют вид

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}.$$

Если дано, что M всегда положительно и постоянно, какие знаки следует выбрать в этих уравнениях? Что получится, если мы выберем другие положительные направления для тока и электродвижущей силы в нижней катушке? Теперь соединим катушки, как показано на рис. б. Какова индуктивность L' этого контура,

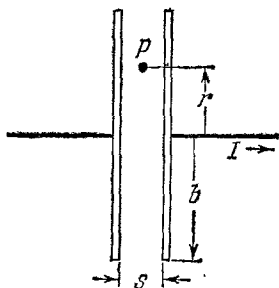


выраженная через L_1 , L_2 и M ? Какова индуктивность L'' контура при соединении катушек, изображенном на рис. в? Какой контур, б или в, имеет большую самоиндукцию? Считая, что самоиндукция любого из контуров должна быть величиной положительной (почему она не может быть отрицательной?), найдите общее правило, справедливое для любых пар катушек и связывающее относительные величины L_1 , L_2 и M .



К задаче 7.11.

7.12. Астрофизическая задача об энергии магнитного поля. В межзвездном пространстве нашей Галактики величина магнитного поля обычно принимается равной 10^{-6} гс. Вещество в этом пространстве состоит из атомов водорода (приблизительно один атом на 1 см^3), движущихся с тепловыми скоростями порядка 10^5 см/сек . Как относится величина энергии, запасенной в данном объеме магнитного поля, к величине кинетической энергии атомов в этом объеме?



К задаче 7.14.

7.13. Катушка с сопротивлением в $0,01 \text{ ом}$ и самоиндукцией в $0,5 \text{ мГн}$ присоединена к большой 12-вольтовой батарее с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Через какое время после замыкания контура ток достигнет 90% своей конечной величины? Какое количество энергии будет запасено к этому времени в магнитном поле? Какое количество энергии будет при этом взято от батарей? Ответ. $t=0,115 \text{ сек}$, $U_M=292 \text{ Дж}$, $U_6=1008 \text{ Дж}$.

7.14. Ток смещения. Магнитное поле внутри разряжающегося конденсатора (изображенного на рис. 7.27) можно, в принципе, вычислить, суммируя вклады от всех элементов тока проводимости,

как показано на рис. 7.31, но это было бы долгим делом. Если поле \mathbf{B} можно считать симметричным относительно оси, то гораздо легче найти поле в точке,

пользуясь следующим интегральным законом:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{a},$$

применяемым к круговому пути, охватывающему точку. Мы должны знать при этом полный ток, пронизывающий S . Найдите таким способом поле в точке P , расположенной в середине между пластинами конденсатора на расстоянии r от оси симметрии. (Сравните полученный результат с вычислением индуцированного электрического поля \mathbf{E} в примере к рис. 7.16.)

О т в е т. $2\pi r B = \frac{4\pi I}{c} \frac{r^2}{b^2}, \quad B = \frac{2Ir}{cb^2}.$

7.15. Покажите, что электромагнитное поле, выраженное следующими уравнениями, удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} E_x = E_y = 0; & & E_z = \cos(y - ct); \\ B_x = \cos(y - ct); & & B_y = B_z = 0. \end{aligned}$$