

трическое поле  $\mathbf{E} = -(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ , вызывающее силу  $q\mathbf{E} = -q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ . Эта сила уравнивает силу  $q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ , которая в противном случае заставила бы любой заряд  $q$  двигаться вдоль стержня». Наблюдатель в  $F'$  говорит: «Внутри стержня электрического поля нет, а существующее в нем однородное магнитное поле силы не создает, так как нет движущихся зарядов». Оба утверждения справедливы.

### 7.3. Рамка, движущаяся в неоднородном магнитном поле

Что произойдет, если мы заставим сделанную из провода прямоугольную рамку (рис. 7.5) двигаться с постоянной скоростью в однородном магнитном поле? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно спросить себя,—имея в виду систему координат  $F'$ ,— что произошло бы, если бы мы поместили такую рамку в однородное электрическое поле? Очевидно, на двух противоположных сторонах рамки появилось бы некоторое количество зарядов и больше ничего не произошло бы. Предположим, однако, что поле  $\mathbf{B}$  в системе координат  $F$  постоянно во времени, но не однородно в пространстве.

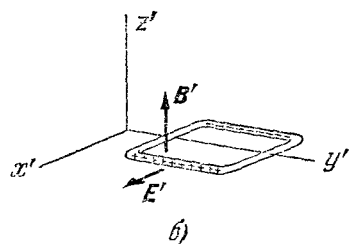
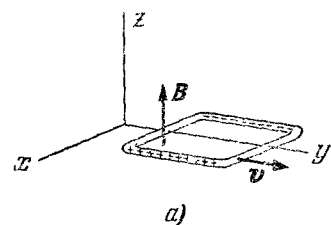


Рис. 7.5. а) Рамка движется в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$  (система координат  $F$ ); б) Поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ , наблюдаемые в системе координат  $F'$ , в которой рамка неподвижна.

Для наглядности поместим на рис. 7.6 короткий соленоид, являющийся источником этого поля. Соленоид вместе с батареей, которая питает его постоянным током, закреплен у начала координат системы  $F$ . (Выше было указано, что в системе координат  $F$  электрического поля нет; в действительности, если взять соленоид с конечным сопротивлением, то появится электрическое поле, вызванное батареей и самой цепью. Это поле не имеет отношения к нашей задаче и его можно не принимать во внимание. В самом деле, ведь весь соленоид вместе с батареей можно поместить в металлическую коробку.)

Расположим теперь рамку, движущуюся в системе координат  $F$  со скоростью  $v$  вдоль оси  $y$ , таким образом, чтобы в некоторый момент времени  $t$  напряженность магнитного поля была  $B_1$  у левой стороны рамки и  $B_2$  у правой стороны (см. рис. 7.6). Пусть  $\mathbf{f}$  обозначает силу, которая действует на заряд  $q$  движущийся вместе с рамкой. Эта сила зависит от положения рамки в рассматриваемый момент времени. Вычислим линейный интеграл от  $\mathbf{f}$ , взятый по всей рамке: на двух сторонах рамки, которые параллельны направлению движения, сила  $\mathbf{f}$  перпендикулярна к элементу пути  $ds$ , следовательно, эти сто-

роны не дают никакого вклада в интеграл. Две другие стороны, каждая из которых имеет длину  $w$ , дают

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \frac{qv}{c} (B_1 - B_2) w. \quad (4)$$

Если мы предположим, что перемещение заряда  $q$  по рамке происходит за достаточно короткое время, так что положение рамки заметно не меняется, то уравнение (4) дает работу, совершенную силой  $\mathbf{f}$ . Работа, приходящаяся на единицу заряда, равна  $(1/q) \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ . Мы называем эту величину *электродвижущей силой*. Она обозначается буквой  $\mathcal{E}$  и часто сокращенно называется «э. д. с.».

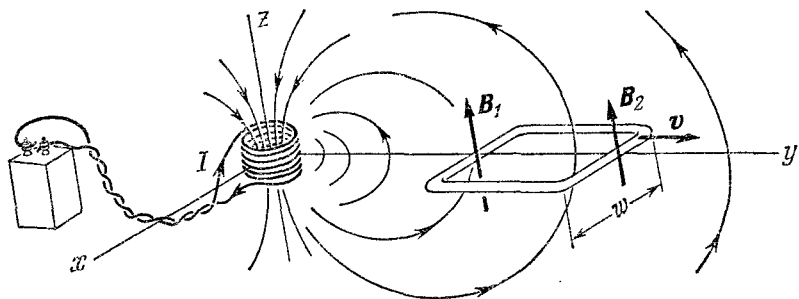


Рис. 7.6. Поле  $\mathbf{B}$ , наблюдаемое в системе координат  $F$ , не является однородным. Оно изменяется в пространстве как по направлению, так и по величине. Система координат  $F$ .

$\mathcal{E}$  имеет ту же размерность, что и электрический потенциал, и измеряется в единицах СГСЭ<sub>V</sub> или эргах на единицу заряда,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}. \quad (5)$$

Термин *электродвижущая сила* был введен выше, в разделе 4.10; э. д. с. была определена как работа, затраченная на движение единицы заряда по контуру с гальваническим элементом. Расширим теперь определение э. д. с., чтобы включить в него любое действие, которое заставляет заряд циркулировать по замкнутому пути. Если путь представляет собой реальную цепь с сопротивлением  $R$ , то  $\mathcal{E}$  вызовет ток, равный, согласно закону Ома,  $I = \mathcal{E}/R$ . В нашем случае  $\mathbf{f}$  является силой, которая действует на заряд, движущийся в магнитном поле, и величина  $\mathcal{E}$  равна

$$\mathcal{E} = \frac{v\omega}{c} (B_1 - B_2). \quad (6)$$

Электродвижущая сила, следующая из уравнения (6), связана весьма простым выражением со скоростью изменения магнитного потока, проходящего сквозь рамку. Магнитным потоком, проходящим сквозь рамку, называется поверхностный интеграл от  $\mathbf{B}$  по поверхности, ограниченной рамкой. Поток  $\Phi$  сквозь замкнутую

кривую, или петлю  $C$ , изображенную на рис. 7.7, а, выражается поверхностным интегралом от  $\mathbf{B}$  по  $S_1$ :

$$\Phi_{(S_1)} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1. \quad (7)$$

Мы могли бы начертить бесконечно много поверхностей, ограниченных кривой  $C$ . На рис. 7.7, б изображена одна из них,  $S_2$ . Почему несущественно, какую из поверхностей выбрать для вычисления потока? Выбор поверхности не имеет значения, так как  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  будет равен одной и той же величине для всех таких поверхностей. Потратим немного времени, чтобы понять этот вопрос раз

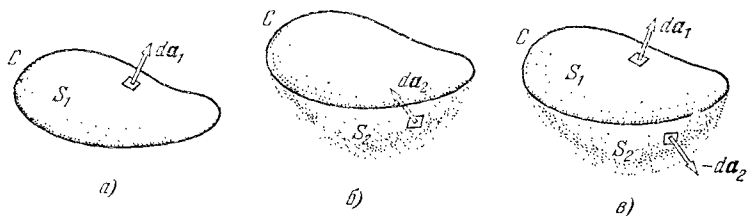


Рис. 7.7. а) Поток через поверхность  $S_1$  равен  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1$ . б)  $S_2$  представляет собой другую поверхность, ограниченную кривой  $C$ . в) Складываемые поверхности  $S_1$  и  $S_2$  для получения замкнутой поверхности, для которой  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  должен исчезнуть, докажете, что

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2.$$

и навсегда. Поток через поверхность  $S_2$  будет равен  $\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$ .

Заметьте, что мы выбираем направление вектора  $d\mathbf{a}_2$  из нижней части  $S_2$ , в соответствии с нашим выбором стороны  $S_1$ . Это даст положительное число, если полный поток сквозь  $C$  направлен вверх.

$$\Phi_{(S_2)} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2. \quad (8)$$

В разделе 6.2 было показано, что дивергенция магнитного поля равна нулю:  $\text{div} \mathbf{B} = 0$ . Тогда из теоремы Гаусса следует, что если  $S$  представляет собой некую замкнутую поверхность («оболочку»), а  $V$  является объемом внутри этой поверхности, то

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div} \mathbf{B} \, dv = 0. \quad (9)$$

Применим вышесказанное к замкнутой поверхности, образованной соединением поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 7.7, в). На поверхности  $S_2$  внешняя нормаль противоположна по направлению вектору  $d\mathbf{a}_2$ , которым мы пользовались при вычислении потока сквозь  $C$ .

Таким образом,

$$0 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int S_1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int S_2 \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{a}_2),$$

или

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2. \quad (10)$$

Отсюда следует, что выбор поверхности для вычисления потока сквозь  $S$  не имеет значения.

Все это довольно очевидно, если вы понимаете, что выражение

$\text{div } \mathbf{B} = 0$  подразумевает пространственное сохранение потока. Какой поток входит в некоторый объем, такой и выходит. (Мы рассматриваем ситуацию во всем пространстве в определенный момент времени.) Часто полезно представить себе «трубки» потока. Трубка потока (рис. 7.8) представляет собой поверхность, в каждой точке которой силовые линии магнитного поля касательны к поверхности. Через такую поверхность поток не проходит, следовательно, она вмещает некоторую данную величину потока, подобно телефонному кабелю с проводами внутри. Сквозь любую замкнутую кривую, проведенную вокруг трубки потока, проходит поток одинаковой величины. Это рассуждение можно перенести и на электрическое поле  $\mathbf{E}$ , но лишь для тех областей, где нет электрических зарядов так как  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ . Магнитное же поле всегда и везде имеет нулевую дивергенцию.

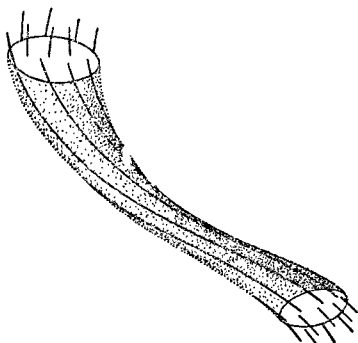


Рис. 7.8. Трубка потока. Силовые линии магнитного поля касательны к поверхности трубки. Трубка охватывает определенную величину потока  $\Phi$ . Для любого сечения трубки интеграл  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  имеет одну и ту же величину  $\Phi$ . Трубка тока не обязательно должна быть круглой. Вы можете начать где угодно, с любого поперечного сечения, и силовые линии поля покажут, как меняются размер и форма сечения по мере продвижения вдоль трубки.

Вернемся к движущейся рамке и найдем скорость изменения потока через нее. За время  $dt$  рамка пройдет расстояние  $v dt$ . Это приводит к изменению полного потока сквозь рамку, который равен  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$  по поверхности, стягивающей рамку. Во-первых, как видно из рис. 7.9, поток в правой части рамки увеличивается на  $B_2 w v dt$ , во-вторых, слева теряется величина потока, равная  $B_1 w v dt$ . Следовательно,  $d\Phi$ , изменение потока через рамку за время  $dt$ , равно

$$d\Phi = -(B_1 - B_2) w v dt. \quad (11)$$

Сравнивая уравнения (11) и (6), мы видим, что по крайней мере в данном случае электродвижущую силу можно выразить следующим образом:

$$\mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (12)$$

Можно показать, что это выражение справедливо почти всегда для петли любой формы, движущейся любым способом. Петля  $C$  на рис. 7.10 занимает положение  $C_1$  в момент времени  $t$  и движется таким образом, что в момент времени  $t+dt$  оказывается в положении  $C_2$ . Данный элемент петли  $ds$  переносится в новое положение со скоростью  $v$ .  $S$  представляет собой поверхность, которая стягивает петлю в момент времени  $t$ . Поток сквозь петлю в этот момент времени равен

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \quad (13)$$

Магнитное поле  $\mathbf{B}$  возникает из источников, неподвижных в данной системе координат, и постоянно во времени в любой точке этой системы. В момент времени  $t+dt$  поверхность, стягивающая петлю,

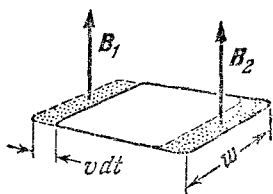


Рис. 7.9. За интервал времени  $dt$  рамка получает приращение потока, равное  $B_2 w v dt$ , и теряет поток  $B_1 v w dt$ .

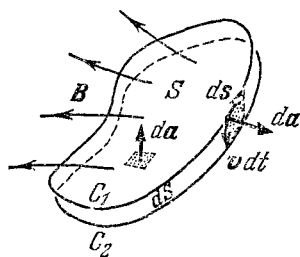


Рис. 7.10. Петля передвигается за время  $dt$  из положения  $C_1$  в положение  $C_2$ .

является первоначальной поверхностью  $S$ , фиксированной в пространстве, но увеличенной на «ободок»  $dS$ . (Вспомните, что для вычисления потока можно брать любую поверхность, стягивающую петлю.) Таким образом,

$$\Phi(t+dt) = \int_{S+dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi(t) + \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \quad (14)$$

Отсюда изменение потока за время  $dt$  в точности равно величине потока через «ободок»  $dS$ , т. е.  $\int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ . Элемент поверхности ободка  $da$  равен  $(v dt) \times ds$ , и интеграл по поверхности  $dS$  можно записать как интеграл по пути  $C$  следующим образом:

$$d\Phi = \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_C \mathbf{B} \cdot [(v dt) \times d\mathbf{s}]. \quad (15)$$

Так как  $dt$  в данном интеграле постоянно, мы вынесем  $dt$  за знак интеграла и получим

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_C \mathbf{B} \cdot (v \times d\mathbf{s}). \quad (16)$$

Согласно правилу для скалярного тройного произведения (т. I, гл. 2, формула (52)) мы имеем тождество:  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$ .

Используя его для преобразования подынтегрального выражения в (16), получим

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (17)$$

Сила, действующая на заряд  $q$ , движущийся вместе с петлей, равна  $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})/c$ , следовательно, электродвижущая сила, представляющая собой линейный интеграл вокруг петли от силы, действующей на единицу заряда, равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (18)$$

Сравнивая уравнения (17) и (18), мы получаем простое выражение, уже приведенное выше (уравнение (12)). Оно справедливо и здесь для произвольно движущейся петли любой формы. (Мы даже не предполагаем, что  $\mathbf{v}$  одинаково для всех частей петли!) Итак, линейный интеграл вокруг движущейся петли от  $\mathbf{f}/q$  (сила, приходящаяся на единицу заряда) равен коэффициенту  $-1/c$ , умноженному на скорость изменения потока сквозь петлю.

Знак линейного интеграла и направление, в котором поток является положительным, связаны правилом винта с правой нарезкой или правилом правой руки. Например, на рис. 7.6 поток направлен вверх сквозь рамку и уменьшается. Принимая во внимание знак минус уравнения (12) и пользуясь правилом правой руки, мы получим электродвижущую силу, которая стремится переместить положительный заряд вокруг рамки против часовой стрелки, если смотреть на рамку сверху вниз. Это показано на рис. 7.11.

Существует более удобный способ решения вопроса о знаке и направлении. Заметьте, что если бы в направлении индуцированной электродвижущей силы протекал ток, как показано на рис. 7.11, то сам этот ток создавал бы некоторый поток сквозь рамку, противодействующий предполагаемому изменению потока. Это — существенный физический факт, а не результат произвольного соглашения о знаках и направлениях. Он демонстрирует стремление системы сопротивляться изменению состояния. В данном случае этот факт называется законом Ленца.

Другой пример действия закона Ленца показан на рис. 7.12. Проводящее кольцо падает в магнитном поле катушки. Поток сквозь кольцо направлен вниз и возрастает по величине. Для противодействия этому изменению нужен некоторый другой поток, направленный вверх. Такой поток будет создан током, текущим по кольцу в направлении, указанном стрелками. По закону Ленца

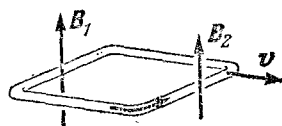


Рис. 7.11. Поток сквозь рамку направлен вверх и со временем уменьшается по величине. Стрелка показывает направление электродвижущей силы, т. е. направление перемещения положительного заряда.

индуцированная э. д. с. будет иметь такое направление, чтобы вызвать этот ток.

Электродвижущая сила вызывает ток в рамке, показанной на рис. 7.6 и 7.11, и если рамка имеет конечное сопротивление, в ней будет рассеиваться некоторое количество энергии. Каков источник этой энергии? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим силу, действующую на ток в рамке, если он течет в направлении стрелки на рис. 7.11.

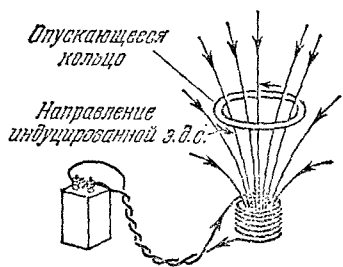


Рис. 7.12. Во время опускания кольца увеличивается поток сквозь кольцо, направленный вниз. Индуцированная э.д. с. будет, согласно закону Ленца, направлена по стрелкам, так как ток, текущий в этом направлении, создает поток, направленный вверх сквозь кольцо. Система противодействует происходящему изменению.

Проводник справа, в поле  $B_2$ , будет испытывать силу, толкающую его вправо, в то время как противоположную сторону рамки, находящуюся в поле  $B_1$ , сила будет толкать влево. Но  $B_1$  больше, чем  $B_2$ , поэтому результирующая сила, действующая на рамку, будет направлена влево, против движения. Чтобы рамка двигалась с постоянной скоростью вправо, необходима работа внешних сил, и энергия, затраченная таким образом, выделяется в конце концов в виде тепла в проводе. Представьте, что произошло бы в случае нарушения закона Ленца или если бы направление силы, приложенной к рамке, совпало бы с направлением ее движения!

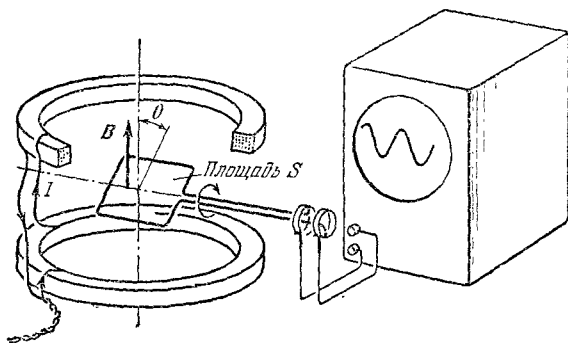


Рис. 7.13. Две катушки создаст магнитное поле  $B$ , которое вблизи рамки почти однородно. В рамке, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , индуцируется синусоидально меняющаяся электродвижущая сила.

Рамка или катушка, вращающиеся в магнитном поле, являются весьма обычными составными частями электрических машин и приборов. Применим полученные нами знания к рассмотрению системы, изображенной на рис. 7.13 и представляющей собой рамку, вращающуюся с постоянной скоростью в почти однородном магнитном поле. Механические детали, как, например, ось, подшипники, привод

и т. д., на рисунке не показаны. Поле  $\mathbf{B}$  создается двумя неподвижными катушками. Предположим, что рамка вращается с угловой скоростью  $\omega$  рад/сек. Ее положение в любой момент времени определено углом  $\theta$  и  $\theta = \omega t + \alpha$ , где постоянная  $\alpha$  определяет положение рамки при  $t=0$ . Компонента  $\mathbf{B}$ , перпендикулярная к плоскости рамки, равна  $B \sin \theta$ , следовательно, поток сквозь рамку в момент времени  $t$  равен

$$\Phi(t) = SB \sin(\omega t + \alpha), \quad (19)$$

где  $S$  — поверхность рамки. Тогда для индуцированной электродвижущей силы мы имеем

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{SB\omega}{c} \cos(\omega t + \alpha). \quad (20)$$

Если рамка не замкнута, а соединена вращающимися вместе с ней кольцами через щетки с внешними проводами, как показано на рис. 7.13, мы обнаружим на зажимах осциллографа разность потенциалов, изменяющуюся по синусоиде.

Поясним вопрос об единицах на численном примере. Предположим, что величина магнитного поля  $B$  равна 500 гс, скорость вращения 30 об/сек, площадь рамки 100 см<sup>2</sup>. Тогда  $\omega = 2\pi \times 30$ , или 188 рад/сек и амплитуда, т. е. максимальная величина переменной электродвижущей силы, равна

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\max} &= \frac{SB\omega}{c} = \frac{(188 \text{ сек}^{-1})(100 \text{ см}^2)(500 \text{ гс})}{3 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}} = \\ &= 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ гс} \cdot \text{см} \text{ (или ед. СГСЭ}_V\text{)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку  $\mathcal{E}$  представляет собой работу на единицу заряда, ее можно выражать в единицах СГСЭ<sub>V</sub>. Заметьте, что единицы в уравнении (21) сводятся к гс·см. Величины электрического поля  $E$  и магнитного поля  $B$  имеют одинаковую размерность в гауссовой системе СГС. Например, в формуле преобразования  $\mathbf{E}' = (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$  мы умножаем величину магнитного поля на безразмерное отношение  $v/c$  для получения электрического поля. (Единица электрического поля, СГСЭ<sub>V</sub>/см, не имеет собственного названия.) Итак, гс·см непосредственно преобразуется в 1 (ед. СГСЭ<sub>V</sub>/см)·см, т. е. в 1 ед. СГСЭ<sub>V</sub>. В практической системе единиц амплитуда электродвижущей силы в этом примере составляет  $3,1 \cdot 10^{-4} \cdot 300$ , или 0,093 в.

#### 7.4. Рамка покоится, источник поля движется

Мы можем при желании рассматривать опыт, изображенный на рис. 7.6, из системы координат, которая движется вместе с рамкой. Это не меняет физической сущности дела, а изменит только слова, которыми мы пользуемся для ее описания. Пусть  $F'$  — система координат  $x', y', z'$ , связанная с рамкой, которую мы теперь считаем неподвижной (рис. 7.14). Катушка и батарея, неподвижные в системе координат  $F$ , движутся в отрицательном направлении оси  $y'$  со