

на заряды, расположенные в ней, действует сила $(v/c) \times \mathbf{B}$ дин на единицу заряда. Линейный интеграл от этой силы на единицу заряда, взятый вокруг рамки, является электродвижущей силой \mathcal{E} и равен $-(1/c) (d\Phi/dt)$. Поток Φ равен $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ по поверхности S , стягивающей рамку, в некоторый момент времени t по моим часам».

Наблюдатель в F' говорит: «Эта рамка неподвижна, и только электрическое поле могло бы заставить двигаться находящиеся в ней заряды. И действительно, здесь имеется некоторое электрическое поле \mathbf{E}' . Кажется, оно возникло благодаря похожему на магнит предмету, который в данный момент со свистом пронесится мимо рамки со скоростью $-\mathbf{v}$, создавая довольно сильное магнитное поле \mathbf{B}' . Электрическое поле таково, что $\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}'$ по этой неподвижной рамке равен не нулю, а $-1/c$, умноженной на скорость изменения потока сквозь петлю, $d\Phi/dt'$. Поток Φ' равен $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$ по поверхности, стягивающей рамку, значения B' должны быть измерены по всей этой поверхности в некоторый момент времени t' по моим часам».

До сих пор наши выводы были релятивистски точными. Они справедливы для любой скорости $v \leq c$ при условии, что мы добросовестно соблюдаем различия между \mathbf{B} и \mathbf{B}' , t и t' и т. д. Если $v \ll c$, так что величиной v^2/c^2 можно пренебречь, B' будет практически равно B и мы можем спокойно пренебречь также различием между t и t' .

7.5. Универсальный закон индукции

Проведем три опыта с приборами, изображенными на рис. 7.15. Столы расположены на колесиках и их можно легко передвигать.

Чувствительный гальванометр соединен с хорошо знакомой нам рамкой, в которой для увеличения индуцированной электродвижущей силы прибавлено несколько новых витков. Откровенно говоря,

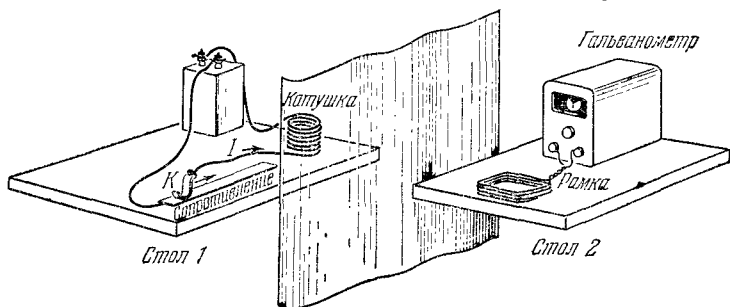


Рис. 7.15. Опыт состоит или в движении каждого из столов в отдельности, или в изменении тока I в катушке при неподвижных столах.

чувствительность нашего опыта ограничена еще и тем, что мы пользуемся слабым источником магнитного поля. Может быть, в вашей лаборатории вам удастся поставить более удачный опыт.

Опыт I. Стол 2 движется вправо со скоростью u , в катушке постоянный ток и стол 1 неподвижен. Стрелка гальванометра отклоняется. Это не удивительно; с такой ситуацией мы уже знакомы (см. раздел 7.3).

Опыт II. Неподвижен стол 2, в катушке постоянный ток, стол 1 движется влево со скоростью u . Стрелка гальванометра отклоняется. Это снова не удивляет нас. Мы только что обсуждали равноценность опытов I и II, которые являются примером инвариантности Лоренца или, при низких скоростях движения наших столов, инвариантности Галилея. Мы знаем, что в обоих опытах отклонение стрелки гальванометра можно связать со скоростью изменения потока Φ сквозь рамку.

Опыт III. Оба стола неподвижны, но мы меняем ток I в катушке перемещением движка реостата K . Мы делаем это так, что уменьшение поля \mathbf{B} у рамки происходит с той же скоростью, что и в опытах I и II. Отклоняется ли стрелка гальванометра?

Наблюдатель, находящийся у рамки на столе 2 и измеряющий магнитное поле в этом месте как функцию времени и положения, не может различить опыты I, II и III. Представим себе, что между двумя столами находится черная занавеска. Несмотря на то, что конфигурации поля для II и III опытов могут немного различаться, наблюдатель, который не знает, что происходит за занавеской, не мог бы решить на основании одних только измерений локального поля \mathbf{B} , какой опыт имеет место. Следовательно, если стрелка гальванометра в опыте III не отклонилась на ту же самую величину, то это означало бы, что связь между магнитным и электрическим полями в некоторой области зависит от природы удаленного источника. Два магнитных поля, существенно одинаковые по своим локальным свойствам, в одном случае были бы связаны с электрическим полем, для которого $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$, а в другом случае это не имело бы места.

Исследуя вопрос экспериментально, мы находим, что опыт III эквивалентен I и II. Стрелка гальванометра отклоняется на ту же величину, что и прежде. Опыты Фарадея впервые продемонстрировали этот фундаментальный факт. Электродвижущая сила, которую мы наблюдаем, зависит только от скорости изменения потока Φ и ни от чего другого. Мы можем сформулировать закон индукции Фарадея как следующее универсальное утверждение:

Если C — некоторая замкнутая кривая, неподвижная в системе координат x, y, z , а S — поверхность, стягивающая C , и $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ — магнитное поле, измеренное в точке (x, y, z) для любого момента времени t , то

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (25)$$

Воспользовавшись понятием ротора, этот закон можно выразить в дифференциальной форме. Если выражение

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (26)$$

верно для любой кривой C и стягивающей поверхности S , как утверждает наш закон, то в любой точке

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (27)$$

Чтобы показать, что уравнение (27) является следствием уравнения (26), мы будем, как обычно, сжимать C в точку, в которой функция \mathbf{B} не имеет особенностей. Тогда, в пределе, изменением \mathbf{B} на малом элементе поверхности \mathbf{a} , стягивающей C , можно будет пренебречь и величина поверхностного интеграла будет близка к $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$. По определению (см. уравнение (2.76)), предел, к которому стремится $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$,

когда элемент поверхности превращается в точку, равен $\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{E}$.

Таким образом, в пределе, мы имеем

$$\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right). \quad (28)$$

Так как это выражение справедливо для любого бесконечно малого \mathbf{a} , то *)

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (29)$$

Так как \mathbf{B} может зависеть от положения и от времени, мы напомним $\partial\mathbf{B}/\partial t$ вместо $d\mathbf{B}/dt$. Тогда мы получим две совершенно эквивалентные формулировки закона индукции:

$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$	(30)
или $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$	

В уравнении (30) электрическое поле \mathbf{E} должно быть выражено в абсолютных электростатических единицах, т. е. в единицах СГСЭ_V/см, а \mathbf{B} следует измерять в гауссах. При этом электродвижущая сила $\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ будет выражена в единицах СГСЭ_V. На прак-

*) Заметьте, что, выбирая \mathbf{a} в направлении оси x , мы имеем $(\text{rot } \mathbf{E})_x = -\frac{1}{c} \frac{dB_x}{dt}$, и т. д.

тике мы обычно предпочитаем выражать электродвижущую силу в вольтах, оставляя в качестве единицы силы магнитного поля гаусс.

Вспоминая, что 1 ед. СГСЭ_V эквивалентна 300 в, мы видим, что связь между \mathcal{E} и скоростью изменения потока должна иметь вид

$$\mathcal{E}_{(e)} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -10^{-8} \frac{d}{dt} \int_{(cm)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -10^{-8} \frac{d\Phi}{dt} \left(\frac{gc \cdot cm^2}{сек} \right). \quad (31)$$

Дифференциальное выражение $\text{rot } \mathbf{E} = -\left(\frac{1}{c}\right) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ хорошо помогает понять проблему локальной природы связи электрического и магнитного полей, которую мы пытались поставить выше. Изменение \mathbf{B} во времени вблизи данной точки полностью определяет $\text{rot } \mathbf{E}$ в этой точке, остальное не имеет значения. Но это, конечно, не определяет полностью само поле \mathbf{E} . Не нарушая этого соотношения, мы можем прибавить любое электростатическое поле, для которого $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

В качестве конкретного примера предположим, что в катушках, подобных изображенным на рис. 7.13, вместо постоянного тока течет переменный ток с частотой 60 периодов/сек. Ток и магнитное поле меняются как $\sin(2\pi \cdot 60 \cdot t)$, или $\sin 377 t$. Предположим, что амплитуда тока такова, что магнитное поле \mathbf{B} в

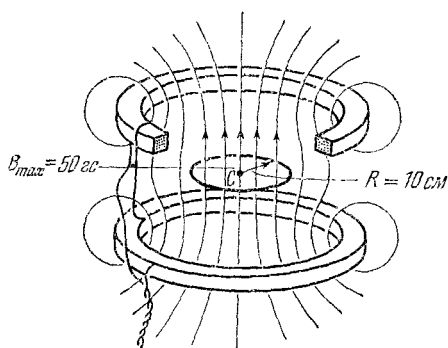


Рис. 7.16. Переменный ток в катушках создает магнитное поле, которое в центре колеблется с амплитудой 50 гс. В любой момент времени внутри круга С поле приблизительно однородно.

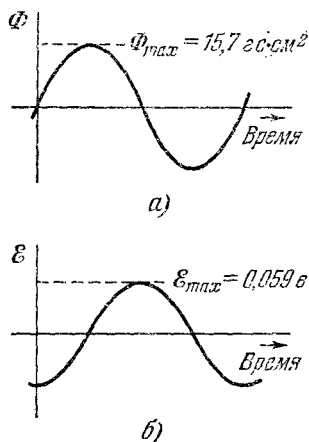


Рис. 7.17. а) Поток сквозь круг С. б) Электродвижущая сила на пути С.

центральной области достигает максимального значения в 50 гс. Мы хотим получить индуцированное электрическое поле и электродвижущую силу на круговом пути с радиусом 11 см, изображенном на рис. 7.16. Допустим, что поле \mathbf{B} практически однородно внутри круга, в любой момент времени

$$B = 50 \sin 377t, \quad (32)$$

где B выражено в гауссах и t в секундах. Поток сквозь петлю C равен

$$\Phi = \pi r^2 B = \pi \cdot 10^2 \cdot 50 \sin 377t = 15\,700 \sin 377t \text{ (гс} \cdot \text{см}^2\text{)}. \quad (33)$$

Применяя уравнение (31) для вычисления э. д. с. в вольтах, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -(10^{-8}) \frac{d\Phi}{dt} = -(10^{-8}) (377) (15\,700) \cos 377t = \\ &= -0,059 \cos 377t \text{ (в)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Максимальное значение, достигнутое \mathcal{E} , равно 59 мв. Знак минус обеспечивает выполнение закона Ленца. Если определение направлений произведено правильно. Изменение \mathcal{E} во времени показано на рис. 7.17.

Что можно сказать о самом электрическом поле. Обычно мы не можем вычислить E , зная только величину $\text{rot } E$. Однако в данном случае наш путь C представляет собой окружность, охватывающую центр симметричной системы. Если вблизи нет других электрических полей, мы можем предположить, что на круге C E лежит

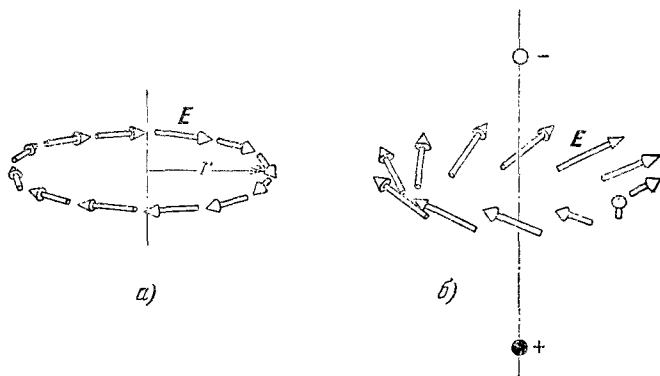


Рис. 7.18. Электрическое поле на круговом пути C : а) при источниках в виде симметричных осциллирующих токов; б) при наличии дополнительного электростатического поля двух зарядов, расположенных на оси.

в плоскости круга и имеет постоянную величину. Тогда найти E весьма просто, так как $\int_C E \cdot da = 2\pi r E = \mathcal{E}$, а эту величину мы уже вычислили. В этом случае электрическое поле на окружности должно в определенный момент иметь вид, показанный на рис. 7.18, а. Но если поблизости расположены другие источники полей, оно будет совершенно другим. Если на оси расположить, например, положительный и отрицательный заряды, как показано на рис. 7.18, б, то электрическое поле в окрестности круга будет суперпозицией электростатического поля двух зарядов и электрического поля индукции.