7.6. Взаимная индуктивность

Два контура, или петли, C_1 и C_2 закреплены в определенном положении по отношению друг к другу (рис. 7.19). Каким-то образом, например, с помощью батареи и реостата, в контуре C_1 создается ток I_1, силу которого можно менять. Пусть $\mathbf{B}_1(x, y, z)$ — магнитное поле, которое возникло бы, если бы ток в C_1 имел постоянную величину I_1, а через Φ_{21} обозначим поток $\mathbf{B}_1$ сквозь контур C_2. Тогда

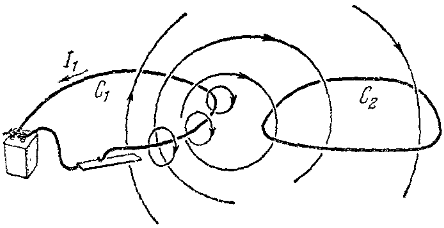

Рис. 7.19 Ток I_1 в петле C_1 вызывает определенный поток Φ_{21} сквозь петлю C_2.

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2, \qquad (35)$$

где S_2 — поверхность, стягивающая петлю C_2. При неизменных форме и положении двух закрепленных контуров поток Φ_{21} будет пропорционален I_1:

$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = \text{const}. \qquad (36)$$

Предположим теперь, что ток I_1 меняется во времени, но достаточно медленно, так что поле $\mathbf{B}_1$ в любой точке окрестности C_2 и ток I_1 в контуре C_1 в один и тот же момент времени связаны друг с другом так же, как были бы связаны при постоянном токе. (Для того чтобы понять, почему необходимо такое ограничение, представьте, что C_1 и C_2 находятся на расстоянии 10 *м* друг от друга и что мы увеличиваем ток в C_1 в два раза за 10 *нсек*!) Поток Φ_{21} будет меняться пропорционально изменению I_1. В контуре C_2 появится индуцированная э. д. с., равная по величине

$$\mathscr{E}_{21} = -\frac{\text{const}}{c}\frac{dI_1}{dt}. \qquad (37)$$

Постоянная в этом уравнении имеет то же значение, что и в уравнении (36). Обозначим ее через M_{21}, включив в нее c из знаменателя, и запишем (37) следующим образом:

$$\mathscr{E}_{21} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}. \qquad (38)$$

Постоянная M_{21} называется коэффициентом *взаимной индуктивности*. Ее величина определяется геометрией контуров и их расположением.

Единицы измерения зависят, конечно, от выбора единиц измерения $\mathscr{E}$, I и t. В практической системе, где $\mathscr{E}_{21}$ измеряется в вольтах и I_1 в амперах, M измеряют в *генри* *). Таким образом, взаимная индуктивность M_{21} равна одному генри, если ток I_1, изменяющийся со скоростью 1 *а/сек*, наводит в контуре C_2 электродвижущую силу в 1 *в*.

В качестве примера, рассмотрим контуры на рис. 7.20, представляющие собой два компланарных концентрических кольца, малое кольцо C_2 и большое кольцо C_1. Каков коэффициент M_{21} в этом случае? В центре кольца C_1 при токе I_1 поле B_1 равно

$$B_1 = \frac{2\pi I_1}{cR_1}, \tag{39}$$

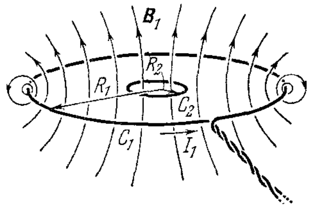

Рис. 7.20. Ток I_1 в кольце C_1 создает поле $\mathbf{B}_1$, приблизительно однородное внутри малого кольца C_2.

где I_1 измерено в единицах СГСЭ$_q$/*сек*, B_1 — в гауссах. (Просмотрите начало раздела 6.5, где было выведено уравнение (6.42), если вы не помните, как определить поле в центре кольца с током.) Мы предполагаем, что $R_2 \ll R_1$ и, следовательно, можно пренебречь изменением B_1 внутри малого кольца. Тогда поток сквозь малое кольцо равен

$$\Phi_{21} = (\pi R_2^2)\,\frac{2\pi I_1}{cR_1} = \frac{2\pi^2 I_1 R_2^2}{cR_1}. \tag{40}$$

Таким образом, «постоянная» из уравнения (36) в этом частном случае равна $2\pi^2 R_2^2/cR_1$ и электродвижущая сила, индуцированная в C_2, равна

$$\mathscr{E}_{21} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{2\pi^2 R_2^2}{cR_1}\cdot\frac{dI_1}{dt}, \tag{41}$$

где $\mathscr{E}_{21}$ выражена в единицах СГСЭ$_V$ и I_1 — в единицах СГСЭ$_q$/*сек*. Чтобы выразить взаимную индуктивность в генри, вспомним, что 1 ед. СГСЭ$_V$=300 *в* и 1 ед. СГСЭ$_q$/*сек*=1 *а*$\cdot 3\cdot 10^9$, и получим

$$\mathscr{E}\,(в) = -\frac{2\pi^2 R_2^2}{R_1}\cdot 10^{-9}\,\frac{dI}{dt}\,(а/сек). \tag{42}$$

Таким образом, величина M_{21} в генри при R_2 и R_1 в сантиметрах равна

$$M_{21} = \frac{2\pi^2\cdot 10^{-9} R_2^2}{R_1}. \tag{43}$$

В данном случае знак минус, который присутствует во всех выражениях для $\mathscr{E}_1$, помогает нам мало. Если вы хотите знать, в каком направлении заставит электродвижущая сила течь ток в контуре C_2, то наиболее надежным средством будет применение закона Ленца.

*) Эта единица названа именем Джозефа Генри (1797—1878), выдающегося американского физика. Явление электромагнитной индукции было открыто Генри независимо и практически одновременно с Фарадеем. Генри первый открыл явление самоиндукции. Он сконструировал электромагнит, прототип электромотора, изобрел электрическое реле и телеграф.

Если бы контур C_1 состоял не из одного, а из N_1 витков провода, то поле B_1 в центре было бы в N_1 раз сильнее для заданного тока I_1, и также, если бы малая петля C_2 состояла из N_2 витков с одним и тем же радиусом R_2, то электродвижущие силы всех витков складывались бы и полная электродвижущая сила в этом контуре была бы в N_2 раз больше, чем в одном витке. Таким образом, для катушек с большим числом витков взаимная индуктивность равна

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}. \tag{44}$$

Мы предполагаем, что витки в каждой катушке плотно прилегают друг к другу и линейные размеры поперечного сечения катушек малы по сравнению с их радиусами. Однако взаимная индуктивность M_{21} имеет точно определенное значение для двух контуров при любой их форме и расположении. Это значение определяется отношением электродвижущей силы (в вольтах) в контуре 2, возникшей при изменении тока I_1 в контуре 1, к скорости изменения этого тока (в *а/сек*). Следовательно,

$$M_{21}\,(\textit{гн}) = \frac{\mathscr{E}_{21}\,(\textit{в})}{\left(\dfrac{dI_1}{dt}\right)\left(\dfrac{a}{\textit{сек}}\right)}. \tag{45}$$

7.7. Теорема взаимности

При рассмотрении контуров C_1 и C_2 нас может интересовать электродвижущая сила, индуцированная в контуре C_1 переменным током, текущим в контуре C_2. В выражение для этой силы должен входить другой коэффициент взаимной индуктивности M_{12}:

$$M_{12} = \frac{\mathscr{E}_{12}}{\left(\dfrac{dI_2}{dt}\right)}. \tag{46}$$

Замечательно, что для любых двух контуров

$$M_{12} = M_{21}. \tag{47}$$

Это не вопрос геометрической симметрии. Даже в простом примере на рис. 7.20 нет симметрии по отношению к двум контурам. Заметьте, что R_1 и R_2 по-разному входят в выражение для M_{21}. Из уравнения (47) следует, что если

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}, \text{ то и } M_{12} = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1},$$

несмотря на то, что контуры C_1 и C_2 совершенно различны.

Чтобы доказать теорему, выраженную уравнением (47), мы должны показать, что поток Φ_{12} сквозь некоторый контур C_1, созданный током I, протекающим в контуре C_2, равен потоку Φ_{21}, который пронизывает контур 2, когда в контуре C_1 течет равный ток I. Приме-