

Если бы контур C_1 состоял не из одного, а из N_1 витков провода, то поле B_1 в центре было бы в N_1 раз сильнее для заданного тока I_1 , и также, если бы малая петля C_2 состояла из N_2 витков с одним и тем же радиусом R_2 , то электродвижущие силы всех витков складывались бы и полная электродвижущая сила в этом контуре была бы в N_2 раз больше, чем в одном витке. Таким образом, для катушек с большим числом витков взаимная индуктивность равна

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}. \quad (44)$$

Мы предполагаем, что витки в каждой катушке плотно прилегают друг к другу и линейные размеры поперечного сечения катушек малы по сравнению с их радиусами. Однако взаимная индуктивность M_{21} имеет точно определенное значение для двух контуров при любой их форме и расположении. Это значение определяется отношением электродвижущей силы (в вольтах) в контуре 2, возникшей при изменении тока I_1 в контуре 1, к скорости изменения этого тока (в а/сек). Следовательно,

$$M_{21} (\text{гн}) = \frac{\mathcal{E}_{21} (\text{в})}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right) \left(\frac{a}{\text{сек}}\right)}. \quad (45)$$

7.7. Теорема взаимности

При рассмотрении контуров C_1 и C_2 нас может интересовать электродвижущая сила, индуцированная в контуре C_1 переменным током, текущим в контуре C_2 . В выражение для этой силы должен входить другой коэффициент взаимной индуктивности M_{12} :

$$M_{12} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{\left(\frac{dI_2}{dt}\right)}. \quad (46)$$

Замечательно, что для любых двух контуров

$$M_{12} = M_{21}. \quad (47)$$

Это не вопрос геометрической симметрии. Даже в простом примере на рис. 7.20 нет симметрии по отношению к двум контурам. Заметьте, что R_1 и R_2 по-разному входят в выражение для M_{21} . Из уравнения (47) следует, что если

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}, \text{ то и } M_{12} = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1},$$

несмотря на то, что контуры C_1 и C_2 совершенно различны.

Чтобы доказать теорему, выраженную уравнением (47), мы должны показать, что поток Φ_{12} сквозь некоторый контур C_1 , созданный током I , протекающим в контуре C_2 , равен потоку Φ_{21} , который пронизывает контур 2, когда в контуре C_1 течет равный ток I . Приме-

ним для доказательства векторный потенциал. Согласно теореме Стокса

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (48)$$

В частности, если \mathbf{A} представляет собой векторный потенциал магнитного поля \mathbf{B} , т. е. если $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, то мы имеем

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi_S. \quad (49)$$

Это означает, что линейный интеграл от векторного потенциала вдоль петли равен потоку \mathbf{B} сквозь петлю.

Векторный потенциал, согласно уравнению (6.35), следующим образом связан со своим источником:

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{I}{c} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}}. \quad (50)$$

Здесь \mathbf{A}_{21} — векторный потенциал в некоторой точке (x_2, y_2, z_2) магнитного поля, созданный током I (ед. СГСЭ_q/сек), текущим в контуре C_1 ; $d\mathbf{s}_1$ — элемент петли C_1 и r_{21} — расстояние от этого элемента до точки (x_2, y_2, z_2) .

На рис. 7.21 изображены две петли, C_1 и C_2 , причем ток течет в C_1 . Пусть (x_2, y_2, z_2) — координаты точки на петле C_2 . Тогда поток сквозь C_2 , вызванный током I в C_1 , равен

$$\Phi_{21} = \int_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{s}_2 = \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} = \frac{I}{c} \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \int_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}}. \quad (51)$$

Аналогично поток сквозь C_1 , обусловленный током I , текущим в C_2 , был бы равен

$$\Phi_{12} = \frac{I}{c} \int_{C_1} d\mathbf{s}_1 \cdot \int_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_2}{r_{12}}. \quad (52)$$

В интегралах (51) и (52) $r_{12} = r_{21}$, так как это не векторы, а расстояния. Смысл каждого из этих интегралов следующий: возьмите скалярное произведение пары линейных элементов, по одному на каждой петле, разделите на расстояние между ними и просуммируйте по всем парам. Единственным различием между уравнениями (51) и (52) является порядок, в котором проводится эта операция, а это не может влиять на окончательный результат. Следовательно $\Phi_{12} = \Phi_{21}$, откуда непосредственно следует, что $M_{12} = M_{21}$. Благодаря

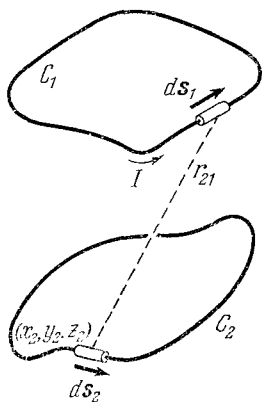


Рис. 7.21. Вычисление потока Φ_{21} сквозь C_2 , созданного током I , текущим в контуре C_1 .

этой теореме нам не нужно делать различия между M_{12} и M_{21} . Мы можем, следовательно, говорить о взаимной индуктивности M любых двух контуров.

Теоремы такого вида часто называются «теоремами взаимности». Существует ряд других теорем взаимности для электрических цепей, аналогичных этой. Вспомним, например, о выражении $C_{jk} = C_{kj}$, упомянутом в разделе 3.6 и использованном в задаче 3.27. Соотношения взаимности обычно выражают некоторый общий закон симметрии, который не является очевидным с первого взгляда. Вы встретитесь с чрезвычайно широким и удивительным, с некоторых точек зрения, законом взаимности, когда будете изучать распространение электромагнитных волн.

7.8. Самоиндукция

При изменении тока I_1 меняется поток через сам контур C_1 и, следовательно, в нем индуцируется электродвижущая сила. Назовем ее \mathcal{E}_{11} . Закон индукции справедлив при любом источнике потока:

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{11}}{dt}, \quad (53)$$

где Φ_{11} представляет собой поток сквозь контур I поля B_1 , обусловленного током I_1 в контуре I . Знак минус показывает, что электродвижущая сила всегда направлена таким образом, чтобы препятствовать изменению тока, — снова закон Ленца! Так как поток Φ_{11} пропорционален I_1 , можно написать

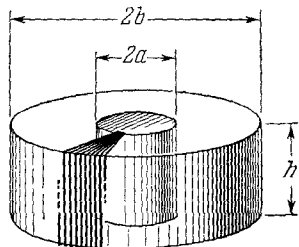
$$\mathcal{E}_{11} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}. \quad (54)$$

Постоянная L_1 называется *самоиндукцией контура*.

В качестве примера контура, для которого можно вычислить самоиндукцию L_1 , рассмотрим прямоугольную тороидальную катушку (см. задачу 6.19), показанную на рис. 7.22. Вы нашли (решив задачу), что ток (ед. СГСЭ_q/сек), текущий в катушке, состоящей из N

витков, создает поле, величина которого на расстоянии, равном радиусу r от оси катушки, равна $B = 2NI/cr$. Полный поток сквозь один виток катушки равен интегралу от этого поля по всему поперечному сечению катушки:

$$\Phi \text{ (одного витка)} = h \int_a^b \frac{2NI}{cr} dr = \frac{2NIh}{c} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (55)$$



Обмотка, содержащая N витков

Рис. 7.22. Тороидальная катушка, содержащая N витков, с прямоугольным поперечным сечением (показано только несколько витков).