этой теореме нам не нужно делать различия между M_{12} и M_{21}. Мы можем, следовательно, говорить о взаимной индуктивности M любых двух контуров.

Теоремы такого вида часто называются «теоремами взаимности». Существует ряд других теорем взаимности для электрических цепей, аналогичных этой. Вспомним, например, о выражении $C_{jk}=C_{kj}$, упомянутом в разделе 3.6 и использованном в задаче 3.27. Соотношения взаимности обычно выражают некоторый общий закон симметрии, который не является очевидным с первого взгляда. Вы встретитесь с чрезвычайно широким и удивительным, с некоторых точек зрения, законом взаимности, когда будете изучать распространение электромагнитных волн.

7.8. Самоиндукция

При изменении тока I_1 меняется поток через сам контур C_1 и, следовательно, в нем индуцируется электродвижущая сила. Назовем ее $\mathscr{E}_{11}$. Закон индукции справедлив при любом источнике потока:

$$\mathscr{E}_{11}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_{11}}{dt}, \tag{53}$$

где Φ_{11} представляет собой поток сквозь контур *1* поля B_1, обусловленного током I_1 в контуре *1*. Знак минус показывает, что электродвижущая сила всегда направлена таким образом, чтобы препятствовать изменению тока,— снова закон Ленца! Так как поток Φ_{11} пропорционален I_1, можно написать

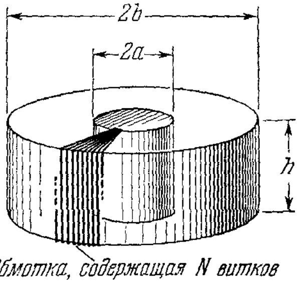


Рис. 7.22. Тороидальная катушка, содержащая N витков, с прямоугольным поперечным сечением (показано только несколько витков).

$$\mathscr{E}_{11}=-L_1\frac{dI_1}{dt}. \tag{54}$$

Постоянная L_1 называется *самоиндукцией контура.*

В качестве примера контура, для которого можно вычислить самоиндукцию L_1, рассмотрим прямоугольную тороидальную катушку (см. задачу 6.19), показанную на рис. 7.22. Вы нашли (решив задачу), что ток (ед. СГСЭ$_q$/*сек*), текущий в катушке, состоящей из N витков, создает поле, величина которого на расстоянии, равном радиусу r от оси катушки, равна $B=2NI/cr$. Полный поток сквозь один виток катушки равен интегралу от этого поля по всему поперечному сечению катушки:

$$\Phi\ (\text{одного витка})=h\int_a^b\frac{2NI}{cr}\,dr=\frac{2NIh}{c}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{55}$$

Поток, пронизывающий контур из N витков, будет в N раз больше:

$$\Phi = \frac{2N^2Ih}{c} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (56)$$

Отсюда индуцированная электродвижущая сила $\mathscr{E}$ равна

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{2N^2h}{c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{dI}{dt}. \qquad (57)$$

Следовательно, самоиндукция такой катушки равна

$$L = \frac{2N^2h}{c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (58)$$

Уравнение (58) дает правильное значение индуктивности, если I измерено в единицах СГСЭ$_q$/*сек* и $\mathscr{E}$ — в единицах СГСЭ$_V$. Для силы тока I в амперах и $\mathscr{E}$ в вольтах соответствующей единицей для L является генри, как и в случае взаимной индуктивности. Используя эти единицы, получим

$$L\,(\textit{гн}) = 2\cdot 10^{-9} N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (59)$$

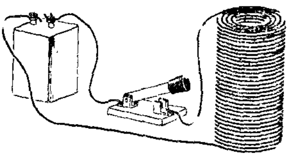
Может показаться, что одно из колец, которые мы рассматривали выше, было бы более простым примером для вычисления самоиндукции. Однако если попытаться вычислить индуктивность простой круговой проволочной петли, мы встретимся с загадочной трудностью. Идея упрощения задачи при диаметре проволоки, равном нулю, кажется неплохой. Но, как нетрудно убедиться, если ток конечной силы течет по проволоке нулевого диаметра, то поток, пронизывающий петлю, сделанную из такой проволоки, оказывается бесконечно большим! Дело в том, что поле B меняется в окрестности такого тока как $1/r$, где r есть расстояние от проволоки, и интеграл от поля B, умноженного на площадь, расходится как $\int (dr/r)$ при $r \longrightarrow 0$.

Чтобы избежать этого, мы можем считать радиус проволоки конечной величиной, а не нулем, что, кстати, ближе к действительности. Вычисления несколько усложняются, что не должно нас беспокоить. Реальная трудность состоит в том, что теперь разные части проволоки становятся различными контурами, связанными различными величинами потока. Мы больше не знаем, что представляет собой понятие «поток сквозь контур». Действительно, поскольку электродвижущая сила различна в разных ниточных петлях, на которые можно разделить контур, то при быстро меняющихся токах, текущих в кольце, должно произойти некое перераспределение плотности тока. Следовательно, индуктивность контура может до некоторой степени зависеть от скорости изменения I и не быть, таким образом, определенно постоянной величиной, как подразумевается в уравнении (54).

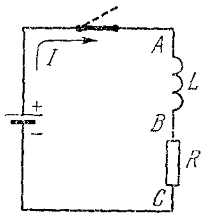
Мы обошли это затруднение в примере с тороидальной катушкой, игнорируя поле в непосредственной близости от отдельных витков обмотки. Большая часть потока не проходит через саму проволоку и, поскольку это так, обстоятельство, которое нас беспокоило, не будет существенным.

7.9. Контур, содержащий самоиндукцию

Предположим, что мы присоединили к батарее, имеющей э. д. с. $\mathscr{E}_0$, катушку, или индуктивность L, как показано на рис. 7.23, *а*. Сама катушка, соединительные провода и даже батарея имеют какие-то сопротивления. Распределение этих сопротивлений в контуре нас не интересует. Их можно объединить в одно сопротивление R, символически изображенное на схеме контура (рис. 7.23, *б*) Остальная часть контура, особенно соединительные провода, также дает свой вклад в самоиндукцию контура; примем, что этот вклад включен в L.



а)



б)

Рис. 7.23. Элементарный контур с индуктивностью и сопротивлением.

Другими словами, рис. 7.23 представляет собой идеализацию физического контура: индуктивность L, обозначаемая символом , не имеет сопротивления; сопротивление R не имеет индуктивности. Приступим к анализу этого идеализированного контура.

Если ток I в контуре меняется со скоростью dI/dt, то индуцируется электродвижущая сила, равная $L\,dI/dt$, направление которой таково, чтобы препятствовать изменению тока. В контуре действует также постоянная электродвижущая сила $\mathscr{E}_0$ батареи. Если за положительное направление тока мы примем то направление, в котором батарея заставляет ток течь в контуре, то полная электродвижущая сила в любой момент времени будет равна $\mathscr{E}_0 - L\,dI/dt$. Эта э. д. с. вызовет ток через сопротивление R. Следовательно,

$$\mathscr{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = RI. \qquad (60)$$

Эта ситуация может быть описана также следующим образом: разность потенциалов между точками A и B, которую мы будем называть напряжением на индуктивности, равна $L\,dI/dt$ и потенциал верхнего конца катушки положителен, если ток в указанном направлении *возрастает*. Разность потенциалов между точками B и C, т. е. напряжение на сопротивлении, равна RI и положительна на верхнем конце сопротивления. Таким образом, сумма напряжений