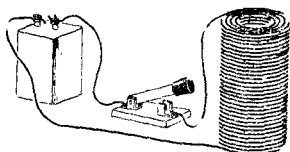


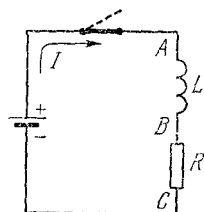
Мы обошли это затруднение в примере с тороидальной катушкой, игнорируя поле в непосредственной близости от отдельных витков обмотки. Большая часть потока не проходит через саму проволоку и, поскольку это так, обстоятельство, которое нас беспокоило, не будет существенным.

## 7.9. Контур, содержащий самоиндукцию

Предположим, что мы присоединили к батарее, имеющей э. д. с.  $\mathcal{E}_0$ , катушку, или индуктивность  $L$ , как показано на рис. 7.23, а. Сама катушка, соединительные провода и даже батарея имеют какие-то сопротивления. Распределение этих сопротивлений в контуре нас не интересует. Их можно объединить в одно сопротивление  $R$ , символически изображенное на схеме контура (рис. 7.23, б). Остальная часть контура, особенно соединительные провода, также дает свой вклад в самоиндукцию контура; примем, что этот вклад включен в  $L$ .



а)



б)

Другими словами, рис. 7.23 представляет собой идеализацию физического контура: индуктивность  $L$ , обозначаемая символом  $\text{---} \text{---} \text{---}$ , не имеет сопротивления; сопротивление  $R$  не имеет индуктивности. Приступим к анализу этого идеализированного контура.

Если ток  $I$  в контуре меняется со скоростью  $dI/dt$ , то индуцируется электродвижущая сила, равная  $L dI/dt$ , направление которой таково, чтобы препятствовать изменению тока. В контуре действует также постоянная электродвижущая сила  $\mathcal{E}_0$  батареи. Если за положительное направление тока мы примем то направление, в котором батарея заставляет ток течь в контуре, то полная электродвижущая сила в любой момент времени будет равна  $\mathcal{E}_0 - L dI/dt$ . Эта э. д. с. вызовет ток через сопротивление  $R$ . Следовательно,

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (60)$$

Эта ситуация может быть описана также следующим образом: разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$ , которую мы будем называть напряжением на индуктивности, равна  $L dI/dt$  и потенциал верхнего конца катушки положителен, если ток в указанном направлении *возрастает*. Разность потенциалов между точками  $B$  и  $C$ , т. е. напряжение на сопротивлении, равна  $RI$  и положительна на верхнем конце сопротивления. Таким образом, сумма напряжений

на индуктивности и сопротивлении равна  $L \frac{dI}{dt} + RI$ . Эта величина идентична разности потенциалов на зажимах батареи, которая равна  $\mathcal{E}_0$  (у нашей идеализированной батареи нет внутреннего сопротивления). Итак, мы имеем уравнение

$$\mathcal{E}_0 = L \frac{dI}{dt} + RI, \quad (61)$$

которое совпадает с уравнением (60).

Прежде чем искать математическое решение уравнения (60), посмотрим, что должно произойти в этом контуре, если замкнуть ключ в момент времени  $t=0$ . До замыкания ключа  $I=0$ . После замыкания ключа, через длительный промежуток времени, установится равновесное состояние, при котором ток будет практически постоянным и равным  $I_0$ . Тогда  $dI/dt \approx 0$  и уравнение (60) сводится к следующему:

$$\mathcal{E}_0 = RI_0. \quad (62)$$

Переход от нулевого тока к току равновесного состояния  $I_0$  не может произойти внезапно при  $t=0$ , так как в этом случае величина  $dI/dt$  будет бесконечно большой. Действительно, сразу после  $t=0$  ток  $I$  будет столь малым, что вторым членом  $RI$  в уравнении (61) можно пренебречь, и тогда

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L}. \quad (63)$$

Скорость возрастания тока ограничивается индуктивностью  $L$ .

На рис. 7.24, *a* подведены итоги вышесказанного. Остается только определить значение тока в любой момент времени. Уравнение (60) является дифференциальным уравнением, подобным тем, с которыми мы уже встречались в разделе 4.11 и в гл. 6 т. I. Без дальнейших разговоров мы можем написать решение уравнения (60), которое удовлетворяет нашим начальным условиям:  $I=0$  при  $t=0$

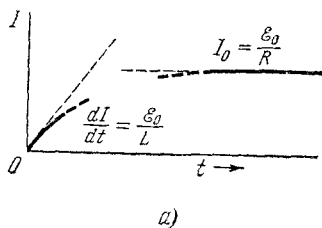
$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t}). \quad (64)$$

На графике рис. 7.24, *b* показана экспоненциальная кривая асимптотического приближения тока к величине  $I_0$ . Постоянной времени в этом контуре является величина  $L/R$ . Если самоиндукция  $L$  измерена в генри, а сопротивление  $R$  — в омах, то эта постоянная измеряется в секундах, так как  $гн = в/(а/сек)$  и  $ом = в/а$ .

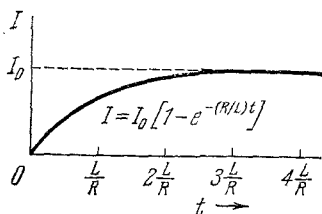
Что произойдет, если мы разомкнем ключ после того, как в цепи установится ток  $I_0$ , принуждая тем самым ток сразу снизиться до нуля? Тогда член  $L dI/dt$  будет равен минус бесконечности! Катастрофа может оказаться страшнее математической. Люди погибали, размыкая ключи в контурах с высокой индуктивностью. Обычно очень высокое индуцированное напряжение создает искру или дугу между открытыми контактами ключа, следовательно, ток течет и после размыкания. Давайте лучше удалим батарею из контура,

включив провод параллельно  $L$  и  $R$ , как показано на рис. 7.25,  $a$ , и отключив одновременно батарею. Наш контур теперь описывается уравнением

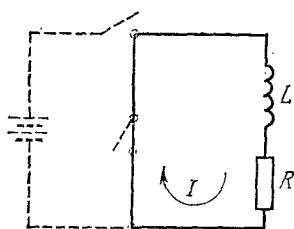
$$0 = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (65)$$



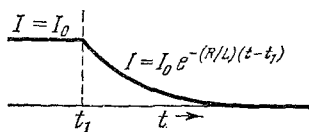
$a)$



$b)$



$a)$



$b)$

Рис. 7.24.  $a)$  Характер изменения тока в начале и через очень большой промежуток времени.  $b)$  Изменение тока во времени в контуре рис. 7.23.

Рис. 7.25.  $a)$  Контур  $LR$ .  $b)$  Экспоненциальное спадание тока в контуре  $LR$ .

с начальным условием  $I = I_0$  при  $t = t_1$ , где  $t_1$  является моментом времени, когда происходит выключение батареи. Решением этого уравнения является просто экспоненциально спадающая функция:

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)} \quad (66)$$

с той же постоянной времени,  $L/R$ , что и прежде.

## 7.10. Энергия, запасенная в магнитном поле

Во время уменьшения тока, заданного уравнением (66) и показанного на рис. 7.25,  $b$ , энергия рассеивается в сопротивлении  $R$ . Так как энергия  $dU$ , рассеянная за короткий интервал времени  $dt$ , равна  $RI^2 dt$ , то полная энергия, рассеянная после замыкания ключа в момент времени  $t_1$ , должна быть равна

$$U = \int_{t_1}^{\infty} RI^2 dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0^2 e^{-(2R/L)(t-t_1)} dt. \quad (67)$$

Сделав подстановку  $x = 2R(t-t_1)/L$ , легко получить

$$U = RI_0^2 \left( \frac{L}{2R} \right) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} LI_0^2. \quad (68)$$