

## ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 8.1. Резонансный контур

В качестве примера затухающего гармонического осциллятора в гл. 7 т. I был рассмотрен контур, состоящий из индуктивности, емкости и сопротивления. Изучим теперь процессы, происходящие в такой системе, более подробно.

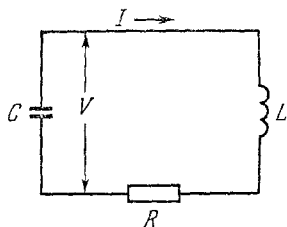


Рис. 8.1. Контур с последовательным соединением  $R$ ,  $L$  и  $C$ .

Схема на рис. 8.1 представляет собой контур из последовательно соединенных  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Обозначим через  $Q$  заряд, находящийся в момент времени  $t$  на емкости  $C$ . Разность потенциалов, или напряжение, на емкости обозначим через  $V$ ; очевидно, что это же напряжение приложено и к последовательно соединенным индуктивности  $L$  и сопротивлению  $R$ . Примем за

положительное напряжение  $V$  такое напряжение, когда верхняя пластина конденсатора заряжена положительно, и укажем стрелкой на рис. 8.1 положительное направление тока. При выбранных таким образом знаках соотношения, связывающие заряд  $Q$ , ток  $I$  и напряжение на емкости  $V$ , имеют следующий вид:

$$I = -\frac{dQ}{dt}; \quad Q = CV; \quad V = L\frac{dI}{dt} + RI. \quad (1)$$

Мы хотим исключить две из трех переменных  $Q$ ,  $I$  и  $V$ . Из двух первых уравнений мы получаем  $I = -CdV/dt$ , после чего третье уравнение принимает вид

$$V = -LC(d^2V/dt^2) - RC(dV/dt),$$

или

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0. \quad (2)$$

Это — дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Попробуем взять в качестве решения следую-

щую функцию:

$$V = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t, \quad (3)$$

где  $A$ ,  $\alpha$  и  $\omega$  — постоянные величины. Первая и вторая производные от этой функции равны

$$\frac{dV}{dt} = -Ae^{-\alpha t} [-\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t], \quad (4)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t} [(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t]. \quad (5)$$

Подставляя эти величины в уравнение (2) и сокращая на множитель  $Ae^{-\alpha t}$ , получим

$$\begin{aligned} & (\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t - \\ & - \frac{R}{L} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{LC} \cos \omega t = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Это выражение будет справедливо для всех  $t$  тогда и только тогда, когда коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  равны нулю. Иными словами, должны выполняться условия:

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0 \quad (7)$$

и

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0. \quad (8)$$

Первое из этих уравнение дает следующее значение  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad (9)$$

Из второго уравнения следует

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}. \quad (10)$$

Так как постоянная  $\omega$  представляет собой действительное число, то  $\omega^2$  не может иметь отрицательного значения. Следовательно, уравнение (3) будет решением уравнения (2) только при  $R^2/4L^2 \leq 1/LC$ . Действительно, мы хотим исследовать случай «слабого затухания», что соответствует малому сопротивлению. Поэтому предположим, что значения  $R$ ,  $L$  и  $C$  контура обеспечивают выполнение неравенства  $R < 2\sqrt{LC}$ .

Функция  $Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$  не является единственным возможным решением. С таким же успехом можно, принимая значения  $\alpha$  и  $\omega$  из уравнений (9) и (10), взять в качестве решения функцию  $Be^{-\alpha t} \times \sin \omega t$ . Общее решение будет равно сумме частных решений:

$$V(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (11)$$

Произвольные постоянные  $A$  и  $B$  должны быть выбраны такими, чтобы удовлетворить начальным условиям. Эта проблема не пред-

ставляет для нас большого интереса. В каждом данном случае решение может содержать синус или косинус или их суперпозицию, и это не более принципиально, чем вопрос о начале хода часов. Существенным является наличие затухающих синусоидальных колебаний.

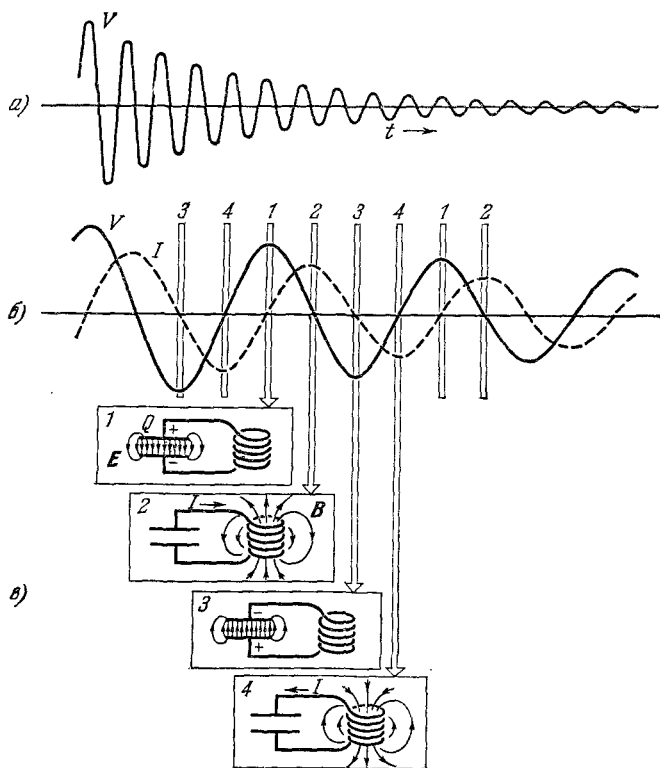


Рис. 8.2. а) Затухающее синусоидальное колебание напряжения в  $RLC$ -контуре. б) Часть кривой графика (а) с растянутой шкалой времени и кривой тока  $I$ . в) Периодический переход энергии от электрического поля к магнитному и обратно. Каждый рисунок соответствует времени, отмеченному такими же числами на рис. б.

Зависимость напряжения от времени показана на рис. 8.2, а. Она, конечно, не может быть справедлива для всего прошедшего времени. Когда-то в прошлом контуру была каким-то образом сообщена энергия и затем он начал работать. Например, вначале при разомкнутом контуре конденсатор мог быть заряжен, а потом соединен с катушкой.

На рис. 8.2, б шкала времени растянута и штрихом показан ток  $I$ . Пусть напряжение  $V$  описывается затухающей косинусоидой (уравнение (3)). Тогда ток следующим образом зависит от времени:

$$I = -C \frac{dV}{dt} = AC\omega \left( \sin \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t \right) e^{-\alpha t}. \quad (12)$$

Отношение  $\alpha/\omega$  является мерой затухания. Если это отношение очень мало, то за время, в течение которого амплитуда уменьшается незначительно, происходит большое число колебаний.

Для рис. 8.2 мы принимаем  $\alpha/\omega \approx 0,04$ . Тогда член с косинусом в уравнении (12) будет невелик. Наличие этого члена приведет к сдвигу фазы колебаний на небольшой угол, равный  $\arctg(\alpha/\omega)$ . Поэтому колебания тока отстают по фазе от колебания напряжения почти точно на четверть периода.

Эти колебания сводятся к переходу энергии от конденсатора к индуктивности, т. е. от электрического поля к магнитному, и обратно. В момент времени, обозначенный на рис. 8.2, б цифрой 1, вся энергия сосредоточена в электрическом поле. Через четверть периода, в момент времени 2, конденсатор разряжен и почти вся энергия перешла в магнитное поле катушки. Во время этих колебаний, из-за наличия сопротивления  $R$ , энергия, запасенная в полях, постепенно уменьшается.

Относительное затухание осциллятора часто выражается величиной, обозначаемой  $Q$ . Она была введена в гл. 7 т. I при общем описании гармонических осцилляторов. (Эту величину не следует смешивать с зарядом конденсатора!)  $Q$  характеризует «добротность», или «коэффициент добротности». Обычно этими терминами не пользуются, а просто говорят о «величине  $Q$ ». Чем меньше затухание, тем больше  $Q$ . Для осциллятора с частотой  $\omega$  величина  $Q$  представляет собой безразмерное отношение следующего вида:

$$Q = \omega \cdot \frac{\text{запасенная энергия}}{\text{среднее количество рассеянной мощности}}. \quad (13)$$

Можно запомнить, что  $Q$  есть число радиан в угле  $\omega t$  (т. е.  $2\pi$ , умноженное на число колебаний), соответствующее уменьшению энергии колебаний в  $e$  раз.

Энергия, запасенная в нашем контуре, пропорциональна  $V^2$ , или  $I^2$ , и, следовательно, пропорциональна  $e^{-2\alpha t}$ . Она уменьшается в  $e$  раз за время  $t = \frac{1}{2\alpha}$ , что соответствует  $\omega/2\alpha$  радиан. Итак, для нашего  $RLC$ -контурa

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R}. \quad (14)$$

Дайте приблизительную оценку  $Q$  для колебания, изображенного на рис. 8.2.

Очевидно, что рассмотренный нами случай включает в себя ряд более простых. Если  $R=0$ , мы имеем осциллятор без всякого затухания с частотой  $\omega_0$ , равной

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (15)$$

В системах, с которыми мы имеем дело, затухание часто бывает достаточно мало и при вычислении частоты им можно пренебречь.

Затухание, как будет показано в задаче 8.9, влияет на частоту  $\omega$  только во втором порядке.

Для полноты описания кратко рассмотрим явления, происходящие в контуре с сильным затуханием, когда  $R > 2\sqrt{L/C}$ . В этом случае общее решение уравнения (2) имеет вид

$$V(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}. \quad (16)$$

Таким образом, колебаний нет, есть только монотонное затухание. В специальном случае «критического» затухания  $R = 2\sqrt{L/C}$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ , и решение дифференциального уравнения (2) принимает вид

$$V(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (17)$$

При этих условиях полная энергия в контуре с заданными  $L$  и  $C$  рассеивается наиболее быстро (см. задачу 8.8).

На рис. 8.3 показаны все способы поведения колебательного контура: здесь приведены кривые разности потенциалов  $V(t)$  для двух контуров со слабым затуханием, для контура с критическим затуханием и для контура с сильным затуханием.

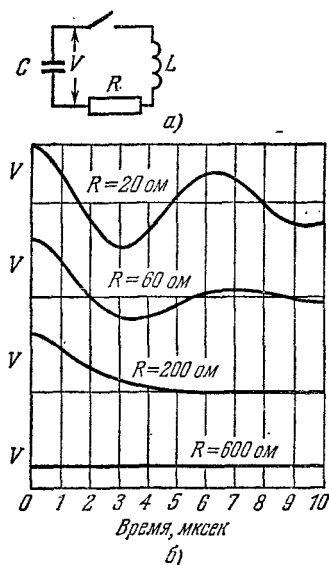


Рис. 8.3. а) Конденсатор заряжен, ключ замыкается в момент  $t=0$  ( $C=0,01$  мкф,  $L=100$  мкген). б) Показаны четыре случая, один из которых, при  $R=200$  ом, является случаем критического затухания.

Емкость и индуктивность в этих четырех случаях одни и те же; меняется только сопротивление. Собственная угловая частота для этого контура  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  равна  $10^6$  сек<sup>-1</sup>. В периодах в секунду это составляет  $10^6/2\pi$ , или 159 кГц/сек.

Чтобы возбудить контур, нужно зарядить конденсатор до некоторой разности потенциалов, скажем, в 1 в, и затем в момент времени  $t=0$  замкнуть ключ. Таким образом,  $V=1$  в при  $t=0$  представляет собой первое начальное условие. При  $t=0$  равен нулю и ток  $I$ , так как индуктивность не позволит току возрасти мгновенно. Следовательно, второе начальное условие, налагаемое на  $V$ , заключается в том, что  $dV/dt=0$  при  $t=0$ .

Заметьте, что все четыре кривые вначале спадают одинаково. В случае сильного затухания ( $R=600$  ом) большая часть кривой близка к простой убывающей экспоненте для RC-контура.

Присутствие индуктивности сказывается только в самом начале, где кривая идет параллельно оси абсцисс.