

## 8.2. Переменный ток

В резонансном контуре, который мы только что рассмотрели, нет источника энергии и, следовательно, его колебания должны рано или поздно затухнуть. В цепи переменного тока мы имеем дело с установившимся режимом — это значит, что амплитуды синусоидально колеблющихся тока и напряжения не меняются. Системой управляет некоторая колебательная электродвижущая сила.

Приложим к контуру, состоящему из индуктивности и сопротивления, электродвижущую силу  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ , которую можно генерировать, например, с помощью машины, схематически показанной на рис. 7.13, используя для вращения ее оси, с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , какой-нибудь двигатель, или мотор. На рис. 8.4. эта электродвижущая сила включена в контур. Внутренним сопротивлением генератора мы или пренебрегаем, или включаем его в сопротивление  $R$ . Так же как при выводе уравнения (7.61), мы полагаем, что сумма падений напряжений на отдельных элементах этого контура равна электродвижущей силе  $\mathcal{E}$ . Уравнение для тока в контуре имеет вид

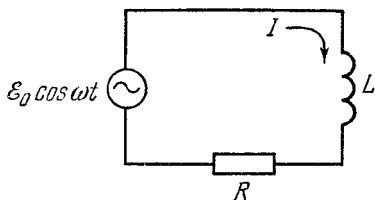


Рис. 8.4. Контур с индуктивностью и сопротивлением, возбуждаемый переменной электродвижущей силой.

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (18)$$

В контуре могут существовать некоторые переходные явления; они зависят от начальных условий, например от того, как и когда был включен генератор. Но нас интересует только установившийся режим, когда ток колеблется с частотой вынуждающей силы и с амплитудой и фазой, необходимыми для удовлетворения уравнения (18). Чтобы показать, что такой режим возможен, рассмотрим ток, описываемый уравнением

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (19)$$

Для определения постоянных  $I_0$  и  $\varphi$  подставим это значение тока в (18):

$$-LI_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) - RI_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (20)$$

Функции  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  можно разделить:

$$-LI_0 \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) + RI_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (21)$$

Полагая коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  по отдельности равными нулю, получаем

$$-LI_0 \cos \varphi - RI_0 \sin \varphi = 0, \quad (22)$$

что дает

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}, \quad (23)$$

и

$$-LI_0\omega \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 = 0, \quad (24)$$

что дает

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R \cos \varphi - \omega L \sin \varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{R (\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi)} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \varphi}{R}; \quad (25)$$

или, так как из (23)

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (26)$$

то

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (27)$$

На рис. 8.5 колебания  $\mathcal{E}$  и  $I$  изображены на одном графике. Так как угол  $\varphi$  имеет отрицательное значение, ток достигает максимума немного позже, чем электродвижущая сила. Это выражают слова-

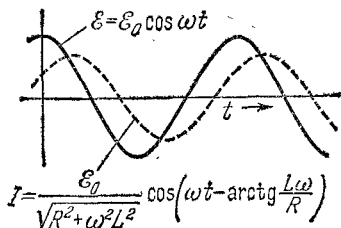


Рис. 8.5. Кривые тока  $I$  в контуре, изображенном на рис. 8.4, и электродвижущей силы  $\mathcal{E}$ ; шкала времени общая. Обратите внимание на разность фаз.

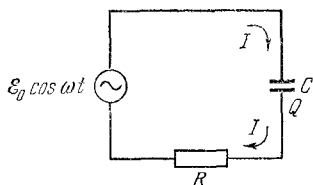


Рис. 8.6. Переменная электродвижущая сила в контуре, состоящем из сопротивления и емкости.

ми: «в контуре с индуктивностью ток отстает от напряжения». Величина  $\omega L$ , имеющая размерность сопротивления и, следовательно, выражаемая в омах, называется *индуктивным реактивным сопротивлением* (иначе — индуктивной реактивностью).

Если заменить индуктивность  $L$  на емкость  $C$ , как это сделано на рис. 8.6, мы получим контур, для которого справедливо уравнение

$$-\frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (28)$$

Рассмотрим решение этого уравнения для установившегося режима:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (29)$$

Так как  $I = -dQ/dt$ , то

$$Q = -\int I dt = -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi). \quad (30)$$

Обратите внимание на то, что при переходе от  $I$  к  $Q$  с помощью интегрирования не возникает вопроса о добавлении постоянной интегрирования, так как мы знаем, что величина в установившемся режиме колеблется симметрично относительно значения  $Q=0$ .

Подстановка значения  $Q$  в уравнение (28) дает

$$\frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi) + R I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (31)$$

Требую, как и прежде, чтобы коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  в отдельности равнялись нулю, мы получим значения  $\varphi$  и  $I_0$ . Они будут равны

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R\omega C} \quad (32)$$

и

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}. \quad (33)$$

Заметьте, что фазовый угол теперь положительный. Говорят, что ток «опережает напряжение» в контуре с емкостью. Смысл этих слов понятен из графика на рис. 8.7.

Выражаясь математическим языком, функция

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}\right) \quad (34)$$

является частным интегралом дифференциального уравнения (18). К нему можно прибавить дополнительную функцию, которая является любым решением однородного дифференциального уравнения

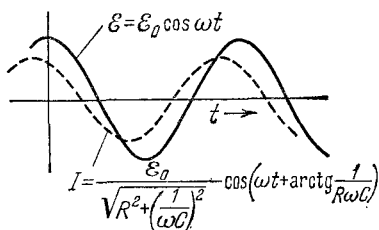


Рис. 8.7. Ток в  $RC$ -контуре. Сравните сдвиг фаз в этом случае со сдвигом фаз в контуре с индуктивностью, изображенным на рис. 8.5.

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0. \quad (35)$$

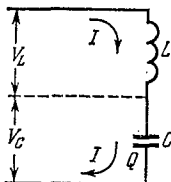
Это уравнение совпадает с уравнением (7.65), решение которого, в виде экспоненциально убывающей функции, мы нашли в разделе 7.9,

$$I \sim e^{-(R/L)t}. \quad (36)$$

Физический смысл этого уравнения состоит в следующем: переходный процесс, определенный некоторыми начальными условиями, представлен в виде убывающей функции  $I(t)$ , заданной уравнением (36). По прошествии времени  $t \gg L/R$  эта составляющая тока исчезает и остается только установившееся синусоидальное колебание, происходящее с частотой вынуждающей силы и представленное частным решением (34).

Поскольку изучение контуров  $RL$  и  $RC$  привело к аналогичным результатам, мы имеем возможность рассмотреть контур, состоящий из последовательно включенных индуктивности и емкости.

Предположим, что переменный ток  $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$  заставили каким-то образом течь в контуре, изображенном на рис. 8.8. Напряжение на индуктивности  $V_L$  будет равно



$$V_L = L \frac{dI}{dt} = -I_0 \omega L \sin(\omega t + \varphi). \quad (37)$$

Напряжение  $V_C$  на емкости должно иметь знак, находящийся в согласии со знаком  $V_L$ , т. е.

$$V_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi). \quad (38)$$

Напряжение на последовательно соединенных  $L$  и  $C$  равно

$$V = V_L + V_C = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (39)$$

Для заданной частоты  $\omega$  это соединение, очевидно, в зависимости от знака величины  $(\omega L - 1/\omega C)$ , эквивалентно или индуктивности, или емкости. Предположим, например, что  $\omega L \geq 1/\omega C$ . Тогда соединение эквивалентно индуктивности  $L'$ , определяемой уравнением

$$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (40)$$

Эквивалентность означает лишь то, что связь между током и напряжением для установившихся колебаний с определенной частотой  $\omega$  одна и та же. Это позволяет заменить  $L$  и  $C$  на  $L'$  в любом контуре, работающем на этой частоте.

Все это справедливо и для простого  $RLC$ -контура, изображенного на рис. 8.9. Вспомним уравнения (23) и (27), представляющие собой решение для контура  $RL$ , возбуждаемого электродвижущей силой  $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ , и заменим  $\omega L$  на  $\omega L - 1/\omega C$ :

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \quad (41)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R}. \quad (42)$$

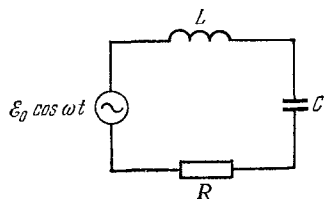


Рис. 8.9.  $RLC$ -контур, возбуждаемый синусоидальной электродвижущей силой.

Для электродвижущей силы определенной амплитуды  $\mathcal{E}_0$  и заданных значений  $L$ ,  $C$  и  $R$  максимальный ток возникает в том случае, когда вынужденная частота  $\omega$  равна

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad (43)$$

что аналогично  $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ , где  $\omega_0$  — резонансная частота незатухающего контура  $LC$ . При этом равенство (41) сводится к следующему:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{R} \quad (44)$$

Точно такой же ток течет в контуре, состоящем из одного сопротивления  $R$ .

В качестве примера рассмотрим контур на рис. 8.3, а, соединенный теперь с источником или генератором переменной электродвижущей силы  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . Частота вынужденных колебаний  $\omega$  может отличаться от резонансной частоты  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Последняя для заданной емкости (0,01 мкф) и индуктивности (100 мкГн) равна  $10^6$  рад/сек (или  $10^6/2\pi$  периодов/сек).

На рис. 8.10 показана амплитуда колебаний тока в зависимости от частоты вынужденных колебаний  $\omega$  для трех различных значений сопротивления  $R$  контура. Предполагается, что амплитуда  $\mathcal{E}_0$  электродвижущей силы равна 100 в в каждом случае; максимум при  $\omega = \omega_0$  острее всего для самого малого сопротивления, равного 20 ом. Это — та самая величина  $R$ , при которой контур, работающий как затухающий осциллятор без вынуждающей электродвижущей силы, ведет себя, как показано на верхнем графике рис. 8.3, б.

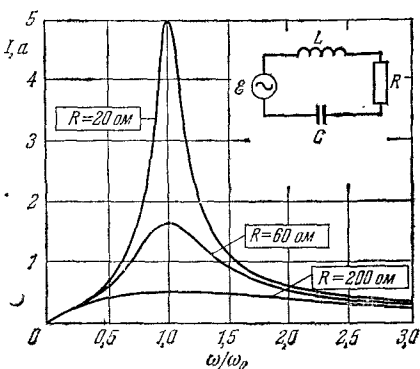


Рис. 8.10. Электродвижущая сила с амплитудой 100 в приложена к контуру с последовательно соединенными  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Элементы контура имеют те же значения, что и в примере с затухающим контуром на рис. 8.3. ( $L = 10^{-4}$  гн,  $C = 10^{-8}$  ф.) Амплитуда тока вычислена по формуле (41) и нанесена на график в зависимости от  $\omega/\omega_0$  для трех различных значений сопротивления ( $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^6$  рад/сек).

Добротность  $Q$  контура, равная согласно уравнению (14)  $\omega_0 L/R$  \*), численно равна в данном случае  $\frac{10^6 \cdot 10^{-4}}{20} = 5$ .

Вообще говоря, чем больше добротность контура  $Q$ , тем уже и выше максимум на кривой зависимости амплитуды тока от вынуждающей частоты  $\omega$ . Чтобы выяснить этот вопрос с большей точностью, рассмотрим частоты, близкие к  $\omega_0$ , например,  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ . Затем вычислим величину  $\omega L - 1/\omega C$ , входящую в знаменатель уравнения (41), с точностью до первой степени отношения  $\Delta\omega/\omega_0$ . Имеем

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{1}{\omega_0 C (1 + \Delta\omega/\omega_0)}, \quad (45)$$

\*) Частота свободно затухающего осциллятора  $\omega$  в уравнении (14) практически совпадает с частотой  $\omega_0$  при условии умеренного или небольшого затухания. Мы пользуемся здесь  $\omega_0$  для определения  $Q$ . В данном рассмотрении  $\omega$  является любой частотой, которой можно питать наш контур.

и так как  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , то эта величина равна

$$\omega_0 L \left[ 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0} \right] \approx \omega_0 L \left( 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right). \quad (46)$$

При резонансе величина под знаком квадратного корня в (41) равна  $R^2$ . Если же  $\omega$  отличается от  $\omega_0$ , то величина подкоренного выражения удвоится, когда  $|\omega L - 1/\omega C| = R$ , или приближенно

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}. \quad (47)$$

Это означает, что при  $\Delta\omega/\omega_0 = 1/2Q$  амплитуда тока уменьшается до  $1/\sqrt{2}$  от его максимального значения. Точки, отвечающие  $\omega_0 \pm \Delta\omega$  называются точками «половинной энергии», так как энергия, или

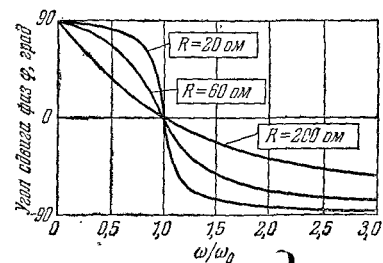


Рис. 8.11. Изменение угла сдвига фаз с частотой в контуре рис. 8.10.

мощность, пропорциональна квадрату амплитуды (см. раздел 8.5). За ширину резонансного пика часто принимают расстояние  $2\Delta\omega$  между точками половинной энергии. Очевидно, что ширина равна произведению  $1/Q$  на резонансную частоту. Колебательные контуры весьма часто имеют гораздо более высокую добротность  $Q$ , чем добротность контура на рис. 8.10.

Радиоприемник настраивается на определенную станцию и различает ее от других с помощью резонансного контура с добротностью  $Q$ , равной нескольким сотням. Нетрудно сделать микроволновый резонансный контур с добротностью  $Q$  порядка  $10^4$  или даже  $10^5$ .

Угол  $\varphi$ , являющийся углом сдвига фаз колебаний тока и э. д. с., меняется с частотой, как показано на рис. 8.11. При очень низкой частоте главной помехой для тока является емкость и угол  $\varphi$  положителен. При резонансе  $\varphi = 0$ . Чем выше  $Q$ , тем более резко происходит перемена знака  $\varphi$  при прохождении частоты через значение  $\omega_0$ .

### 8.3. Цепи переменного тока

Цепь переменного тока представляет собой ряд сопротивлений, емкостей и индуктивностей, в которых текут токи, колебания которых установились и совершаются с постоянной частотой  $\omega$ . Колебания такой частоты возбуждаются одной или несколькими электродвижущими силами. На рис. 8.12 показан пример такой цепи. Источник переменной электродвижущей силы изображен знаком  $\text{---}(\sim)\text{---}$ .

Для одной из ветвей цепи, например для ветви с индуктивностью  $L_2$ , зависимость тока от времени имеет вид

$$I_2 = I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (48)$$