и так как $\omega_0=1/\sqrt{LC}$, то эта величина равна

$$\omega_0 L\left[1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}-\frac{1}{1+\Delta\omega/\omega_0}\right]\approx\omega_0 L\left(2\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right). \qquad (46)$$

При резонансе величина под знаком квадратного корня в (41) равна R^2. Если же ω отличается от ω_0, то величина подкоренного выражения удвоится, когда $|\omega L-1/\omega C|=R$, или приближенно

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{R}{\omega_0 L}=\frac{1}{Q}. \qquad (47)$$

Это означает, что при $\Delta\omega/\omega_0=1/2Q$ амплитуда тока уменьшается до $1/\sqrt{2}$ от его максимального значения. Точки, отвечающие $\omega_0\pm\Delta\omega$ называются точками «половинной энергии», так как энергия, или мощность, пропорциональна квадрату амплитуды (см. раздел 8.5). За ширину резонансного пика часто принимают расстояние $2\Delta\omega$ между точками половинной энергии. Очевидно, что ширина равна произведению $1/Q$ на резонансную частоту. Колебательные контуры весьма часто имеют гораздо более высокую добротность Q, чем добротность контура на рис. 8.10. Радиоприемник настраивается на определенную станцию и различает ее от других с помощью резонансного контура с добротностью Q, равной нескольким сотням. Нетрудно сделать микроволновый резонансный контур с добротностью Q порядка 10^4 или даже 10^5.

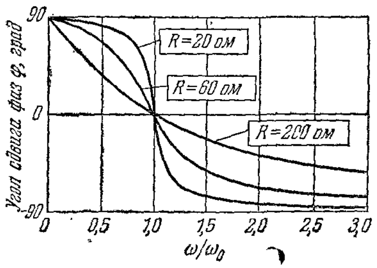

Рис. 8.11. Изменение угла сдвига фаз с частотой в контуре рис. 8.10.

Угол φ, являющийся углом сдвига фаз колебаний тока и э. д. с., меняется с частотой, как показано на рис. 8.11. При очень низкой частоте главной помехой для тока является емкость и угол φ положителен. При резонансе $\varphi=0$. Чем выше Q, тем более резко происходит перемена знака φ при прохождении частоты через значение ω_0.

8.3. Цепи переменного тока

Цепь переменного тока представляет собой ряд сопротивлений, емкостей и индуктивностей, в которых текут токи, колебания которых установились и совершаются с постоянной частотой ω. Колебания такой частоты возбуждаются одной или несколькими электродвижущими силами. На рис. 8.12 показан пример такой цепи. Источник переменной электродвижущей силы изображен знаком —(~)—. Для одной из ветвей цепи, например для ветви с индуктивностью L_2, зависимость тока от времени имеет вид

$$I_2=I_{02}\cos(\omega t+\varphi_2). \qquad (48)$$

Так как частота для всей цепи постоянна, то для задания тока в данной ветви достаточно указать две величины: амплитуду тока I_{02} и постоянную фазу φ_2.

Колебания напряжения на концах ветви также имеют определенную амплитуду и фазу:

$$V_2 = V_{02} \cos(\omega t + \theta_2). \qquad (49)$$

Если нам известны токи и напряжения во всех ветвях, то анализ цепи можно считать законченным. Эти величины можно найти, составив и решив соответствующие дифференциальные уравнения. Если нас интересует переходный режим цепи, то все это необходимо проделать. Однако для установившегося режима существует более простой и элегантный метод. Он основан на двух идеях: 1) переменные токи и напряжения могут быть представлены комплексными числами; 2) при заданной частоте любая ветвь или элемент контура характеризуется отношением напряжения к току.

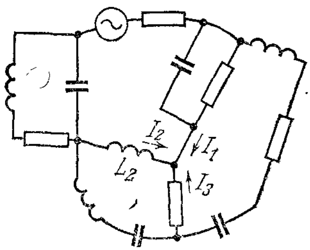

Рис. 8.12. Цепь переменного тока.

Первая идея основана на замечательном математическом тождестве:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta, \qquad (50)$$

где $i^2 = -1$. Ее применение опирается на следующее правило:

> Переменный ток $I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ можно представить комплексным числом $I_0 e^{i\varphi}$, т. е. числом, действительная часть которого равна $I_0 \cos\varphi$, а мнимая часть равна $I_0 \sin\varphi$, и наоборот, если комплексное число $x + iy$ представляет ток I, то ток, как функция времени, выражается действительной частью произведения $(x+iy)\, e^{i\omega t}$.

На рис. 8.13 показано, как пользоваться этим двусторонним правилом. Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить графически в виде точки на плоскости. Легко видеть, что при этом фаза будет выражаться углом $\operatorname{arctg} y/x$, а амплитуда I_0 — модулем $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Следующее свойство введенного нами представления подтверждает его полезность: *представление суммы двух токов есть сумма их представлений.*

Рассмотрим сумму двух токов I_1 и I_2, встречающихся в узле на рис. 8.12. В любой момент времени t сумма токов равна

$$I_1 + I_2 = I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) + I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) =$$
$$= (I_{01} \cos\varphi_1 + I_{02} \cos\varphi_2) \cos\omega t - (I_{01} \sin\varphi_1 + I_{02} \sin\varphi_2) \sin\omega t. \qquad (51)$$

С другой стороны, сумма комплексных чисел, которая, согласно нашему правилу, представляет токи I_1 и I_2, равна

$$I_{01}e^{i\varphi_1}+I_{02}e^{i\varphi_2}=(I_{01}\cos\varphi_1+I_{02}\cos\varphi_2)+i\,(I_{01}\sin\varphi_1+I_{02}\sin\varphi_2).\quad(52)$$

Помножив правую часть уравнения (52) на ($\cos\omega t+i\sin\omega t$) и взяв действительную часть полученного результата, вы получите правую часть уравнения (51).

Это означает, что вместо прибавления или вычитания самих периодических функций времени можно прибавить или отнять представляющие их комплексные числа. Иными словами, алгебра переменных токов в отношении сложения совпадает с алгеброй комплексных чисел. Эта аналогия не распространяется на умножение. Комплексное число $I_{01}I_{02}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ не идентично произведению двух токов в уравнении (51).

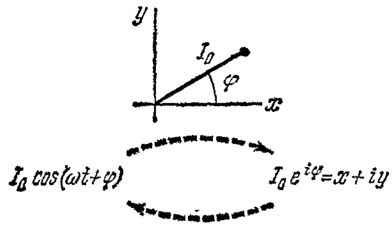

Рис. 8.13. Правила для представления переменного тока комплексным числом. Слева — ток в зависимости от времени, справа — представление в виде комплексного числа (помножьте на $e^{i\omega t}$ и возьмите действительную часть).

Для анализа цепей нам нужно, однако, только сложение токов и напряжений. Например, для узла (рис. 8.12), где встречаются токи I_1 и I_2, справедливо физическое условие, состоящее в том, что в любой момент времени полный ток, входящий в узел, равен нулю. Условие

$$I_1+I_2+I_3=0 \quad (53)$$

должно быть справедливо в том случае, если I_1, I_2 и I_3 являются действительными периодическими функциями времени. Благодаря рассмотренному соответствию это условие можно представить в виде простого алгебраического равенства, состоящего в том, что сумма трех комплексных чисел равна нулю. Все вышесказанное относится и к напряжениям. Одновременно сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре цепи должна быть равна электродвижущей силе, действующей в контуре в данный момент времени. Это условие, связывающее периодические функции напряжения, можно заменить условием, касающимся суммы некоторых комплексных чисел. Эти числа представляют различные осциллирующие функции $V_1(t)$, $V_2(t)$ и т. д.

8.4. Полная проводимость и импеданс

Связь между током, текущим в элементе контура, и напряжением на этом элементе можно заменить связью между комплексными числами, представляющими напряжение и ток. Рассмотрим цепь, состоящую из индуктивности и сопротивления (см. рис. 8.4). Колебание напряжения можно представить числом $\mathscr{E}_0$, а ток — числом $I_0e^{i\varphi}$, где $I_0=\mathscr{E}_0/\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi=-\omega L/R$. Разность фаз φ и от-