С другой стороны, сумма комплексных чисел, которая, согласно нашему правилу, представляет токи I_1 и I_2, равна

$$I_{01}e^{i\varphi_1}+I_{02}e^{i\varphi_2}=(I_{01}\cos\varphi_1+I_{02}\cos\varphi_2)+i\,(I_{01}\sin\varphi_1+I_{02}\sin\varphi_2). \quad (52)$$

Помножив правую часть уравнения (52) на $(\cos\omega t+i\sin\omega t)$ и взяв действительную часть полученного результата, вы получите правую часть уравнения (51).

Это означает, что вместо прибавления или вычитания самих периодических функций времени можно прибавить или отнять представляющие их комплексные числа. Иными словами, алгебра переменных токов в отношении сложения совпадает с алгеброй комплексных чисел. Эта аналогия не распространяется на умножение. Комплексное число $I_{01}I_{02}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ не идентично произведению двух токов в уравнении (51).

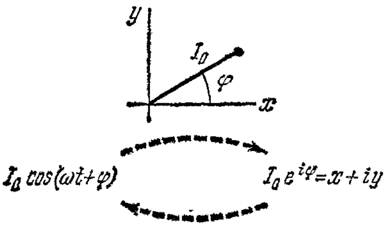

Рис. 8.13. Правила для представления переменного тока комплексным числом. Слева — ток в зависимости от времени, справа — представление в виде комплексного числа (помножьте на $e^{i\omega t}$ и возьмите действительную часть).

Для анализа цепей нам нужно, однако, только сложение токов и напряжений. Например, для узла (рис. 8.12), где встречаются токи I_1 и I_2, справедливо физическое условие, состоящее в том, что в любой момент времени полный ток, входящий в узел, равен нулю. Условие

$$I_1+I_2+I_3=0 \quad (53)$$

должно быть справедливо в том случае, если I_1, I_2 и I_3 являются действительными периодическими функциями времени. Благодаря рассмотренному соответствию это условие можно представить в виде простого алгебраического равенства, состоящего в том, что сумма трех комплексных чисел равна нулю. Все вышесказанное относится и к напряжениям. Одновременно сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре цепи должна быть равна электродвижущей силе, действующей в контуре в данный момент времени. Это условие, связывающее периодические функции напряжения, можно заменить условием, касающимся суммы некоторых комплексных чисел. Эти числа представляют различные осциллирующие функции $V_1(t)$, $V_2(t)$ и т. д.

8.4. Полная проводимость и импеданс

Связь между током, текущим в элементе контура, и напряжением на этом элементе можно заменить связью между комплексными числами, представляющими напряжение и ток. Рассмотрим цепь, состоящую из индуктивности и сопротивления (см. рис. 8.4). Колебание напряжения можно представить числом $\mathscr{E}_0$, а ток — числом $I_0e^{i\varphi}$, где $I_0=\mathscr{E}_0/\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi=-\omega L/R$. Разность фаз φ и отношение амплитуды тока к амплитуде напряжения являются свойствами контура при данной частоте. Введем комплексное число Y, определяемое следующим образом:

$$Y=\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}, \quad \text{где} \quad \varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\omega L}{R}\right). \tag{54}$$

Тогда мы можем написать:

$$I=YV, \tag{55}$$

где V — комплексное число, представляющее напряжение на последовательном соединении R и L, I — комплексное число, представляющее ток. Величина Y называется полной проводимостью. Это же соотношение можно выразить с помощью величины, обратной Y, обозначаемой через Z. Она называется полным сопротивлением, или импедансом:

$$V=\left(\frac{1}{Y}\right)I=ZI. \tag{56}$$

В данном случае мы пользуемся произведением двух комплексных чисел, но только одно из них является представлением переменного тока или напряжения. Вторая величина — это или импеданс, или полная проводимость *).

Импеданс измеряется в омах. Действительно, если элемент тока состоит только из сопротивления R, то импеданс будет величиной действительной и просто равной R, так что уравнение (56) будет заменой закона Ома для цепи постоянного тока: $V=RI$.

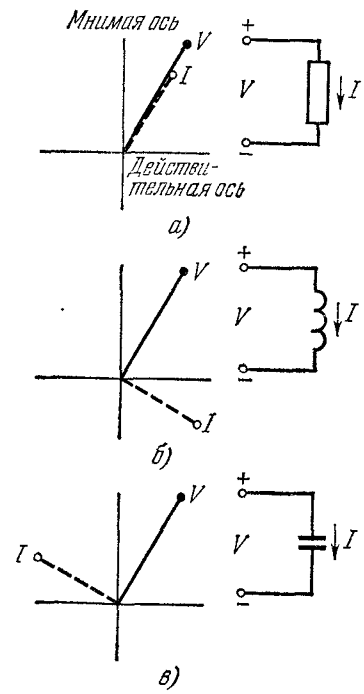

Рис. 8.14. V и I являются комплексными числами, которые представляют напряжение на элементе контура и ток через этот элемент. Разность фаз между колебаниями тока и напряжения представлена здесь углом между «векторами». *а*) Для сопротивления ток и напряжение находятся в фазе. *в*) В емкости ток опережает напряжение.

Для чистой индуктивности без сопротивления полная проводимость является мнимой величиной $Y=-i/\omega L$. Это следует из уравнения (54), если положить в нем R равным нулю. Множитель $-i$ показывает, что колебания тока отстают по фазе от колебаний напряжения на $\pi/2$. На комплексной плоскости, где напряжение представлено числом V (рис. 8.14, *б*), ток будет представлен числом I, положение которого показано на рисунке. Для емкости

*) Таким образом, наша алгебра содержит две категории комплексных чисел: числа, которые представляют, например, импедансы, и числа, представляющие токи. Произведение «двух чисел, представляющих импедансы», а также произведение «двух чисел, представляющих токи» не имеют смысла.

$Y = i\omega C$, что следует, например, из выражения для тока на рис. 8.7. Связь V и I для этого случая показана на рис. 8.14, *в*. На каждом из этих рисунков показано, как выбрать относительный знак V и I. До тех пор пока это не сделано, слова «опережение» и «отставание» не имеют смысла. Заметьте, что положительное направление тока всегда определяется так, чтобы положительное напряжение, приложенное к сопротивлению, вызывало положительный ток (рис. 8.14, *а*).

В следующей таблице приведены свойства трех основных элементов цепей:

Обозначение	Полная проводимость Y	Импеданс $Z = \frac{1}{Y}$
R	$\frac{1}{R}$	R
L	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
C	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$
	$I = YV$	$V = ZI$

Из этих элементов можно построить любой контур. При параллельном соединении элементов или их комбинаций удобно пользоваться полной проводимостью, так как в этом случае проводимости складываются. На рис. 8.15 два «черных ящика» с полными проводимостями Y_1 и Y_2 соединены параллельно. В этом случае мы имеем уравнение

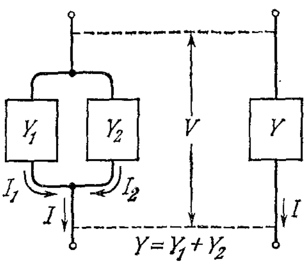

Рис. 8.15. При параллельном соединении складываются проводимости.

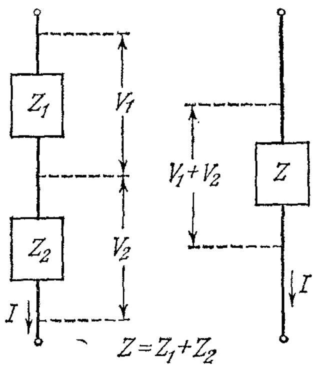

Рис. 8.16. При последовательном соединении складываются импедансы.

$$I = I_1 + I_2 = Y_1 V + Y_2 V = (Y_1 + Y_2) V, \tag{57}$$

смысл которого в том, что полная проводимость одного черного ящика, эквивалентного вышеупомянутым двум, равна $Y = Y_1 + Y_2$. Из рис. 8.16 следует, что при последовательном соединении элементов складываются импедансы. Это звучит так, как будто мы говорим о сети постоянного тока! И действительно, мы свели задачу о цепи переменного тока к задаче о цепи постоянного тока с единственным различием: числа, с которыми мы имеем дело, являются комплексными числами.

В качестве примера рассмотрим контур из параллельно включенных элементов R, L и C (рис. 8.17). Полная проводимость трех параллельных ветвей равна

$$Y=\frac{1}{R}+i\omega C-\frac{i}{\omega L}. \tag{58}$$

Напряжение равно просто $\mathscr{E}_0$, и комплексный ток выражается уравнением

$$I=YV=\mathscr{E}_0\left[\frac{1}{R}+i\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\right]. \tag{59}$$

Амплитуда колебаний тока равна модулю комплексного числа I: $\mathscr{E}_0[(1/R)^2+(\omega C-1/\omega L)^2]^{1/2}$, а фазовый угол равен $\operatorname{arctg}(R\omega C-$ $-R/\omega L)$.

Рассмотренный метод применим только к линейным элементам контуров, т. е. к элементам, в которых ток пропорционален напряжению. Другими словами, наш контур должен описываться линейным дифференциальным уравнением. Для нелинейного элемента мы не можем даже определить понятие импеданса. Нелинейные элементы контуров являются очень важными и интересными устройствами. Вы встречались с рядом таких устройств в лаборатории и могли убедиться в том, что для анализа их работы нужны другие методы.

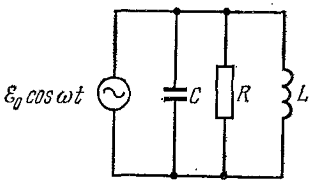

Рис. 8.17. «Параллельный» резонансный контур. Комплексные проводимости трех элементов контура складываются (см. равенство (58)).

Все рассмотрение, выполненное нами, относилось к незатухающим колебаниям постоянной частоты. Исследование переходного режима контура представляет собой другую задачу. Однако в линейном приближении развитый метод может быть в некоторой степени использован даже для неустановившегося режима. Дело в том, что переходный режим можно представить в виде суперпозиции установившихся колебаний с различными частотами и отклик контура на каждую из этих частот можно вычислять таким образом, как будто действует только лишь эта частота. Мы будем заниматься этой задачей в т. III.

8.5. Мощность и энергия переменного тока

Если напряжение на сопротивлении R равно $V_0 \cos \omega t$, ток равен $I=(V_0/R) \cos \omega t$. Мгновенное значение мощности, т. е. мгновенная скорость, с которой энергия рассеивается на сопротивлении, равна

$$P=RI^2=\frac{V_0^2}{R}\cos^2\omega t. \tag{60}$$