сети постоянного тока! И действительно, мы свели задачу о цепи переменного тока к задаче о цепи постоянного тока с единственным различием: числа, с которыми мы имеем дело, являются комплексными числами.

В качестве примера рассмотрим контур из параллельно включенных элементов R, L и C (рис. 8.17). Полная проводимость трех параллельных ветвей равна

$$Y=\frac{1}{R}+i\omega C-\frac{i}{\omega L}. \tag{58}$$

Напряжение равно просто $\mathscr{E}_0$, и комплексный ток выражается уравнением

$$I=YV=\mathscr{E}_0\left[\frac{1}{R}+i\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\right]. \tag{59}$$

Амплитуда колебаний тока равна модулю комплексного числа I: $\mathscr{E}_0[(1/R)^2+(\omega C-1/\omega L)^2]^{1/2}$, а фазовый угол равен $\operatorname{arctg}(R\omega C-R/\omega L)$.

Рассмотренный метод применим только к линейным элементам контуров, т. е. к элементам, в которых ток пропорционален напряжению. Другими словами, наш контур должен описываться линейным дифференциальным уравнением. Для нелинейного элемента мы не можем даже определить понятие импеданса. Нелинейные элементы контуров являются очень важными и интересными устройствами. Вы встречались с рядом таких устройств в лаборатории и могли убедиться в том, что для анализа их работы нужны другие методы.

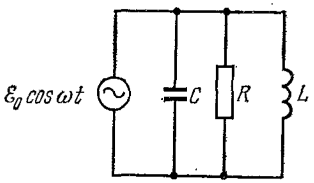


Рис. 8.17. «Параллельный» резонансный контур. Комплексные проводимости трех элементов контура складываются (см. равенство (58)).

Все рассмотрение, выполненное нами, относилось к незатухающим колебаниям постоянной частоты. Исследование переходного режима контура представляет собой другую задачу. Однако в линейном приближении развитый метод может быть в некоторой степени использован даже для неустановившегося режима. Дело в том, что переходный режим можно представить в виде суперпозиции установившихся колебаний с различными частотами и отклик контура на каждую из этих частот можно вычислять таким образом, как будто действует только лишь эта частота. Мы будем заниматься этой задачей в т. III.

8.5. Мощность и энергия переменного тока

Если напряжение на сопротивлении R равно $V_0 \cos \omega t$, ток равен $I=(V_0/R)\cos\omega t$. Мгновенное значение мощности, т. е. мгновенная скорость, с которой энергия рассеивается на сопротивлении, равна

$$P=RI^2=\frac{V_0^2}{R}\cos^2\omega t. \tag{60}$$

Так как среднее значение $\cos^2\omega t$ за много периодов равно $1/2$, то средняя мощность, рассеянная в контуре, равна

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R}. \qquad (61)$$

При расчетах цепей переменного тока обычно пользуются амплитудами тока и напряжения, умноженными на $1/\sqrt{2}$. Такие величины часто называют «эффективными».

Множитель $1/2$ в уравнении (61) исчезает, если мы берем эффективное значение напряжения и

$$\overline{P} = \frac{V_{\text{эфф}}^2}{R}. \qquad (62)$$

Например, обычному напряжению в городской сети, равному 120 *в*, соответствует амплитуда, равная $120\sqrt{2}$ *в*. При этом разность потенциалов между двумя проводами (для переменного тока с частотой 60 *периодов/сек*) равна

$$V(t) = 170\cos 377t, \qquad (63)$$

где V выражено в вольтах и t — в секундах. Амперметр переменного тока калиброван таким образом, что его отсчет равен 1 *а*, когда амплитуда тока составляет 1,414 *а*.

В общем случае мгновенная скорость, с которой энергия доставляется к элементу контура, равна VI, т. е. произведению мгновенных значений напряжения и тока, с учетом знака. Рассмотрим с этой точки зрения ток, текущий в простом контуре LR (см. рис. 8.4). На рис. 8.18 изображены графики тока и напряжения и приведена кривая, пропорциональная произведению VI. Положительная величина VI означает, что энергия от источника электродвижущей силы или генератора поступает в цепь LR. Заметьте, что определенную часть периода произведение VI отрицательно. В это время энергия возвращается к генератору, что объясняется колебанием энергии, запасенной в магнитном поле катушки индуктивности. Запасенная энергия $LI^2/2$ достигает максимума дважды за каждый период.

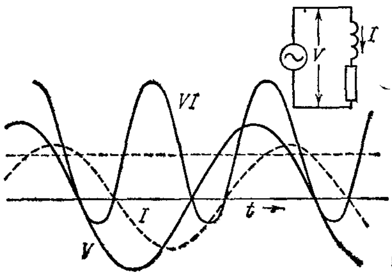


Рис. 8.18. Мгновенная мощность VI — это энергия, поступающая за единицу времени от источника электродвижущей силы (слева) к элементам контура (справа). Среднее по времени значение величины VI (средняя мощность) показано горизонтальной штриховой линией.

Среднее значение мощности $\overline{P}$ показано горизонтальной штриховой линией. Для вычисления средней мощности рассмотрим произведение VI, где $V=\mathcal{E}_0\cos\omega t$ и $I=I_0\cos(\omega t+\varphi)$:

$$VI = \mathcal{E}_0 I_0 \cos\omega t\cos(\omega t+\varphi) = \\ = \mathcal{E}_0 I_0 (\cos^2\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\omega t\sin\varphi). \qquad (64)$$

Среднее по времени для члена, пропорционального $\cos\omega t \sin\omega t$, равно нулю. Это очевидно, если записать его в виде $(\sin 2\omega t)/2$. В то же время среднее значение $\cos^2\omega t$ равно $^1/_2$.

Таким образом, для среднего по времени $\overline{P}$ мы имеем

$$\overline{P} = \overline{VI} = \frac{1}{2}\mathscr{E}_0 I_0 \cos\varphi. \qquad (65)$$

Если эффективные значения тока и напряжения измерены соответственно в вольтах и амперах, то

$$\underset{(вт)}{\overline{P}} = \underset{(в)}{V_{эфф}}\underset{(а)}{I_{эфф}} \cos\varphi. \qquad (66)$$

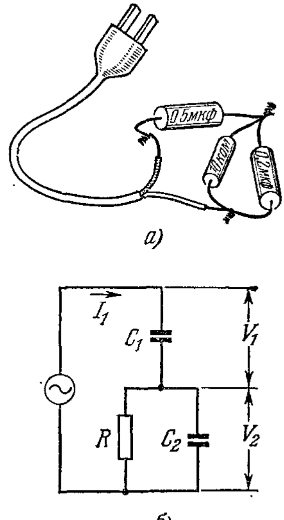


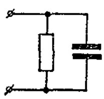
Рис. 8.19. Реальная цепь (*а*), смонтированная для подключения к источнику электродвижущей силы, и схема этой цепи (*б*).

Вся энергия, рассеянная в этом контуре, выделяется в сопротивлении R. Естественно, любая реальная индуктивность имеет какое-то сопротивление. Это включено в сопротивление R. Рассеяние энергии приводит к выделению тепла на активном сопротивлении R.

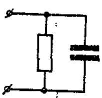
Для упражнения в приемах, рассмотренных в разделе 8.4, обратимся к контуру на рис. 8.19, *а*. Сопротивление в 10 000 *ом* и мощностью 1 *вт* соединено с двумя конденсаторами емкостью в 0,2 и 0,5 *мкф*. Включим этот контур в сеть с напряжением 120 *в* и частотой 60 *гц*. Вопрос: не нагреется ли одноваттное сопротивление слишком сильно? Чтобы выяснить, не превышает ли среднее значение мощности, рассеянной в R, допустимого значения в 1 *вт*, вычислим некоторые токи и напряжения, которые можно измерить в этом контуре. Один из способов анализа контура приведен ниже:

1) Полная проводимость C_2 равна $i\omega C_2 = 377\cdot(2\cdot 10^{-7})i = 0{,}754 \times \times 10^{-4}\ i\,ом^{-1}$.

2) Полная проводимость сопротивления $= \dfrac{1}{R} = 10^{-4}\,ом^{-1}$.

3) Полная проводимость  $= 10^{-4}(1 + 0{,}754i)\,ом^{-1}$.

4) Импеданс контура

 $= \dfrac{1}{10^{-4}(1+0{,}754i)} = \dfrac{10^4(1-0{,}754i)}{1^2+0{,}754^2} = (6360 - 4800i)\ ом.$

5) Импеданс контура $C_1 = -\dfrac{i}{\omega C} = -\dfrac{i}{(377)\ (5\cdot 10^{-7})} = 5300i\ ом.$

6) Импеданс всего контура$=(6360-10\,100i)$ *ом.*

7) $I_1 = \frac{120}{6360-10\,100i} = \frac{120\,(6360+10\,100i)}{(6360)^2+(10\,100)^2} = (5{,}37+8{,}53i)\cdot 10^{-3}\,a.$

Используя эффективное напряжение (равное 120 *в*), мы получим эффективный ток. Это значит, что модуль комплексного числа I_1, который равен $[(5{,}37)^2+(8{,}53)^2]^{1/2}\cdot 10^{-3}$ *а*, или 10 *ма*, дает эффективный ток в амперах. Миллиамперметр переменного тока, включенный последовательно в сеть, показал бы ток в 10 *ма*. Этот ток имеет сдвиг фазы $\varphi=-\mathrm{arctg}\,(0{,}853/0{,}537)$, или $-1{,}01$ *рад* относительно напряжения в сети. Среднее значение мощности, рассеиваемой в контуре, равно

8) $\overline{P} = (120\,в)\,(0{,}010\,a)\cos 1{,}01 = 0{,}64\,вт.$

В этом контуре сопротивление является единственным поглощающим элементом, следовательно, именно в нем должна рассеиваться средняя мощность. Чтобы проверить это, найдем напряжение V_2 на сопротивлении:

9) $V_1 = I_1\left(\frac{-i}{\omega C}\right) = (5{,}37+8{,}53i)\,(-5300i)10^{-3} = (45{,}2-28{,}4i)\,в,$

10) $V_2 = 120-V_1 = (74{,}8+28{,}4i)\,в.$

Ток I_2 в сопротивлении R будет, конечно, совпадать по фазе с V_2, поэтому среднее значение мощности, выделяемой в R, равно

$$\overline{P} = \frac{V_2^2}{R} = \frac{(74{,}8)^2+(28{,}4)^2}{10^4} = 0{,}64\,вт, \qquad (67)$$

что и требовалось узнать.

Таким образом, предельная мощность, которую может выдержать сопротивление, не превышена. В действительности степень нагрева сопротивления зависит не только от рассеянной в нем энергии, но также и от того, насколько успешно происходит отвод тепла. Предельная мощность для сопротивления является только приблизительным показателем.

Задачи

8.1. *Последовательное соединение R и L.* Какая индуктивность (в *гн*) должна быть соединена последовательно с электрической лампочкой (120 *в*, 60 *вт*), если она должна нормально работать, когда вся цепь будет присоединена к сети 240 *в*, 60 *гц*? (Вначале определите требуемое индуктивное реактивное сопротивление. Сопротивлением катушки индуктивности и индуктивностью электрической лампочки можно пренебречь.) Ответ. $L=1{,}10$ *гн.*

8.2. *Последовательное соединение R и C.* Сопротивление 2000 *ом* и конденсатор емкостью 1 *мкф* соединены последовательно и включены в сеть с эффективным напряжением в 120 *в*, 60 *гц*.

а) Чему равен импеданс? Ответ. $|z|=3320$ *ом.*

б) Чему равно эффективное значение тока? Ответ. $I=0{,}036$ *а.*

в) Чему равна энергия, рассеянная в контуре? Ответ. $P=2{,}59$ *вт.*

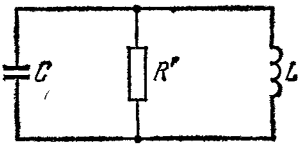
г) Что покажет вольтметр переменного тока, подключенный параллельно к сопротивлению? К емкости? Ответ. $V=72$ *в*, $V_C=95{,}5$ *в.*

д) Горизонтальные пластины катодно-лучевой трубки подключены параллельно сопротивлению, а вертикальные — параллельно емкости. Нарисуйте картину, которую вы ожидаете увидеть на экране.

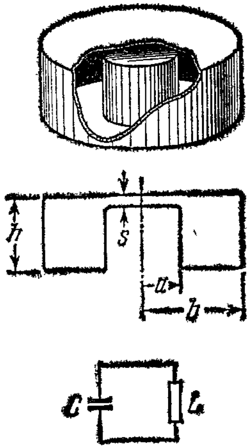
8.3 *Параллельное соединение R, L и C.* Сопротивление 1000 *ом*, конденсатор емкостью 500 *пф* и катушка индуктивностью 2 *мгн* соединены параллельно. Каков импеданс этой цепи при частоте в 10 *кгц*? При частоте в 10 *мгц*? При какой частоте абсолютное значение импеданса имеет максимум?

8.4. В резонансном контуре, изображенном на рисунке, элементом, поглощающим энергию, является сопротивление R', соединенное параллельно с L и C. Составьте уравнение, аналогичное уравнению (2), которое описывало бы этот контур. Найдите также условия, накладываемые на решение, аналогичные тем, которые справедливы для контура с последовательно соединенными R, L и C. Если последовательно соединенные элементы R, L и C и параллельно соединенные элементы R', L и C имеют одинаковые L, C и Q, то каково должно быть отношение R' к R?

8.5. Предположим, что ток в контуре на рис. 8.1 удовлетворяет уравнению (12). Вычислите энергию, запасенную в контуре в момент времени $t=0$ и через четверть периода при $t=\pi/2\omega$. Проверьте, равна ли их разность энергии, рассеянной в сопротивлении за этот промежуток времени. Предположим, что в данной задаче затухание слабое, т.е. что $\alpha/\omega \ll 1$, и пренебрежем величинами, пропорциональными α^2.



К задаче 8.4.



К задаче 8.7.

8.6. Для контура на рис. 8.3, *а* определите значения β_1 и β_2 в случае сильного затухания при сопротивлении $R=600$ *ом*. Определите также отношение B к A (постоянные в уравнении (16)). О т в е т. $\beta_1=5{,}84\cdot10^6$ *сек*$^{-1}$, $\beta_2=0{,}171\cdot10^6$ *сек*$^{-1}$, $\dfrac{B}{A}=34$.

8.7. Резонирующая полость, изображенная на рисунке, является существенной частью многих микроволновых генераторов. Такой резонатор можно считать простым LC-контуром. Его индуктивность совпадает с индуктивностью тороида с одним витком; эта индуктивность непосредственно соединена с параллельными пластинами конденсатора. Найдите выражение для резонансной частоты этого контура и начертите конфигурацию магнитного и электрического полей.