

Иными словами, мы хотим вычислить электрические поля вне диэлектриков и макроскопическое поле \mathbf{E} внутри них при граничных условиях, выраженных через потенциалы и заряды на проводниках.

2) Количественное соотношение между макроскопической поляризуемостью вещества (выраженной через восприимчивость χ_e) и поляризуемостью атомов или молекул, из которых состоит диэлектрик, еще остается таинственным. Чтобы открыть его, мы должны знать, какое поле в действительности действует на поляризуемый атом, если известно усредненное по объему, т. е. макроскопическое, поле в окрестности атома. На данный атом действует не это среднее поле, а некоторое другое поле, которое мы можем назвать локальным. Именно локальное поле, $E_{\text{лок}}$ индуцирует дипольный момент атома. Этот вопрос требует другого, а именно «микроскопического», подхода к явлениям внутри диэлектрика.

Обратимся сначала к задаче 1).

9.10. Поле поляризованного шара

Предположим, что сплошной шар на рис. 9.24, *a* вырезан из пластины на рис. 9.18, *a* и, следовательно, поляризован однородно. Каким будет электрическое поле внутри и снаружи шара? Это — поучительная задача, и ее результаты будут полезны в других случаях. Пусть \mathbf{P} , как обычно, обозначает плотность поляризации,

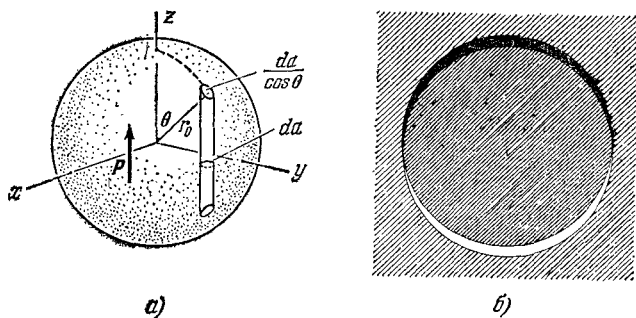


Рис. 9.24. *a*) Разделите поляризованный шар на поляризованные стержни и замените каждый стержень элементами заряда на поверхности шара. *б*) Шар с объемной плотностью положительного заряда и шар с объемной плотностью отрицательного заряда, смещенные на небольшое расстояние относительно друг друга, эквивалентны распределению заряда по сферической поверхности.

постоянную по величине и направлению во всем объеме шара. Поляризованное вещество можно разделить, как пластину на рис. 9.18, *a*, на столбики, параллельные \mathbf{P} , и каждый из них заменить зарядом величиной $(P \times \text{поперечное сечение столбика})$, расположенным на верхней и нижней поверхности столбика. Таким образом, поле, которое мы ищем, есть поле поверхностного заряда, распределенного по сфере с плотностью $\sigma = P \cos \theta$. Множитель $\cos \theta$ входит, как

понятно из рисунка, потому, что столбик с поперечным сечением da вырезает на сфере участок поверхности площадью $da/\cos \theta$. На рис. 9.24, б дано поперечное сечение этой оболочки эквивалентного поверхностного заряда. Здесь величине плотности заряда соответствует переменная толщина черного серпа сверху (плотность положительного заряда) и белого серпа снизу (плотность отрицательного заряда).

Из приведенного рисунка можно понять, что поляризация \mathbf{P} , с нашей точки зрения, возникла в результате небольшого сдвига вверх шара, равномерно заполненного положительным зарядом с объемной плотностью ρ , по отношению к шару с отрицательным зарядом плотности $-\rho$. При таком сдвиге остаются нескомпенсированными положительные заряды сверху и отрицательные снизу, причем их количество меняется как $\cos \theta$ по всей границе. Внутри сферы, где плотности положительных и отрицательных зарядов совпадают, они полностью уничтожают друг друга.

Такая картина дает весьма простой способ вычисления поля вне оболочки поверхностного заряда. Нам известно, что внешнее поле от любого сферического распределения заряда таково, как если бы весь заряд был сконцентрирован в центре шара. Поэтому два шара с полными зарядами $+Q$ и $-Q$ соответственно, центры которых смещены на небольшое расстояние s , создают внешнее поле, совпадающее с полем двух точечных зарядов $+Q$ и $-Q$, расположенных на расстоянии, равном s . Это — диполь с дипольным моментом $p_0 = Qs$.

Микроскопическое описание поляризованного вещества приводит к такому же выводу. На рис. 9.25, а диполи, ответственные

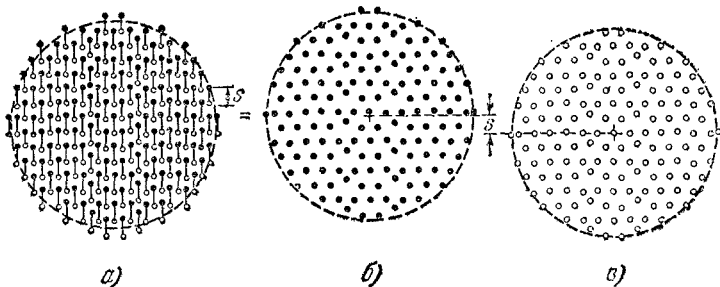


Рис. 9.25. Сфера с ориентированными молекулярными диполями (а) эквивалентна двум наложенным друг на друга несколько смещенным сферам, с положительными (б) и с отрицательными зарядами (в).

за плотность поляризации \mathbf{P} , изображены парами зарядов $+q$ и $-q$, смещенными на расстояние s см друг от друга, для получения дипольного момента $p = qs$. Если в кубическом сантиметре имеется N дипольных моментов, то $P = Np = Nqs$ и полное число таких диполей в шаре равно $(4\pi/3)r^3N$. Положительные заряды, изображенные отдельно на рис. 9.25, б, распределены внутри шара, полный заряд которого равен $Q = (4\pi/3)r^3Nq$, а отрицательные за-

ряды находятся в таком же шаре, но его центр смещен (рис. 9.25, в). Очевидно, что каждое из этих распределений зарядов можно заменить точечным зарядом в центре, если нас интересует внешнее поле на удалении от шаров. «Удаление» означает, что расстояние от поверхности настолько велико, что дискретность распределения заряда оказывается несущественной и ее можно игнорировать, говоря о макроскопических полях. Итак, картина перекрывающихся заряженных сфер с однородной плотностью заряда и представление о реальных диполях, расположенных в вакууме, эквивалентны *). Из обоих способов рассмотрения следует, что данное поле эквивалентно полю диполя, расположенного в центре. Момент этого диполя p_0 представляет собой просто полную поляризацию шара:

$$p_0 = Qs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 Nqs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 P. \quad (39)$$

Величины Q и s сами по себе не имеют значения, и в дальнейшем мы ими не воспользуемся.

Внешнее поле поляризованного шара эквивалентно полю диполя p_0 , расположенного в центре шара, не только на большом расстоянии от шара; в макроскопическом смысле оно является полем диполя и непосредственно у поверхности.

Рис. 9.26. Поле вне однородно поляризованного шара является точно таким же, как поле диполя, расположенного в центре шара.

На рис. 9.26 изображены силовые линии внешнего поля. Для получения этого рисунка мы заштриховали круг, показанный на рис. 9.5. Внутреннее поле представляет собой совсем другую проблему. Рассмотрим электрический потенциал $\varphi(x, y, z)$. Нам известны значения потенциалов во всех точках на сферической поверхности, так как мы знаем внешнее поле. Потенциал диполя $(p_0 \cos \theta)/r^2$ на сферической поверхности радиусом r_0 принимает значение

$$\varphi = p_0 \frac{\cos \theta}{r_0^2} = \frac{4\pi}{3} P r_0 \cos \theta. \quad (40)$$

Так как $r_0 \cos \theta = z$, то потенциал точки на сфере зависит только от ее z -координаты:

$$\varphi = \frac{4\pi}{3} Pz. \quad (41)$$

Задача определения внутреннего поля сводится к следующему. Уравнение (41) дает значение потенциала в любой точке на границе

*) Это кажется достаточно очевидным, но мы детально разобрали этот случай, чтобы показать, что картина «шара с непрерывно распределенным зарядом», которая сильно отличается от того, что имеется внутри реального вещества, не приводит к неверным следствиям.

области, а внутри области потенциал Φ должен удовлетворять уравнению Лапласа. Согласно теореме единственности, доказанной в гл. 3, этого достаточно для определения потенциала внутри области. Если мы сможем найти какое-нибудь решение, то оно должно быть единственным решением. Но функция Cz , где C является некоторой константой, удовлетворяет уравнению Лапласа, так что уравнение (41) действительно дает нам значение потенциала внутри шара. Это — потенциал однородного электрического поля, направленного вдоль отрицательной оси z :

$$E_z = -\frac{\partial\Phi_{\text{внутр}}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{4\pi Pz}{3} \right] = -\frac{4\pi P}{3}. \quad (42)$$

Так как направление оси z определяется направлением вектора \mathbf{P} , то в более общем виде полученный результат можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E}_{\text{внутр}} = -\frac{4\pi\mathbf{P}}{3}. \quad (43)$$

Уравнение (43) дает значение макроскопического поля \mathbf{E} в поляризованном веществе.

На рис. 9.27 показаны и внутреннее, и внешнее поля. У верхнего полюса сферы внешнее поле направлено вверх и равно по формуле (14) для поля диполя

$$E_z = \frac{2p_0}{r^3} = \frac{2(4\pi r_0^3 P/3)}{r_0^3} = \frac{8\pi P}{3} \quad (\text{снаружи}). \quad (44)$$

Это — удвоенная величина внутреннего поля, направленного вниз.

Рассмотренный пример является иллюстрацией к общим правилам поведения компонент поля у поверхности поляризованной среды. Поле \mathbf{E} претерпевает разрыв у поверхности поляризованной среды точно так же, как это происходило бы у заряженной поверхности с плотностью заряда $\sigma = P_n$ в вакууме. Обозначение P_n относится к проекции \mathbf{P} на нормаль, направленную наружу. Следовательно, нормальная компонента \mathbf{E} должна претерпевать разрыв на величину $4\pi P_n$, в то время как компонента \mathbf{E} , параллельная границе, остается непрерывной, т. е. имеет одинаковое значение по обе стороны границы. Действительно, у северного полюса нашей сферы изменение E_z равно $8\pi P/3 - 4\pi P/3$, или $4\pi P/3$. Вернувшись к уравнению (14) для поля диполя, можно показать, что компонента \mathbf{E} , параллельная поверхности, остается непрерывной всюду на сфере при переходе через ее поверхность.

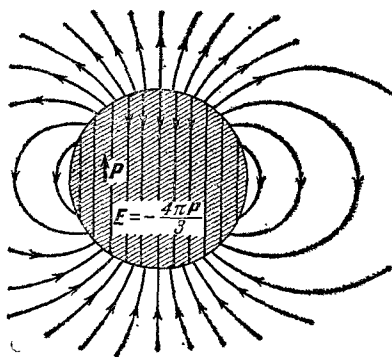


Рис. 9.27. Поле внутри и снаружи одно­родно поляризованного шара.

Ни один из этих выводов не зависит от того, какой причиной вызвана поляризация шара. На рис. 9. 27 показано поле любой сферы, поляризованной однородно. На это поле может быть наложено любое поле других источников, представляющих собой различные возможные системы. Это не повлияет на разрыв \mathbf{E} у границы поляризованной среды. Приведенные правила, следовательно, применимы к любой системе; разрыв в \mathbf{E} определяется исключительно существующей поляризацией.

9.11. Диэлектрический шар в однородном поле

В качестве примера рассмотрим шар из вещества с диэлектрической постоянной ϵ , помещенный в однородное электрическое поле \mathbf{E}_0 , подобное полю между параллельными пластинами воздушного конденсатора (рис. 9.28). Пусть источники этого поля (заряды на пластинах) расположены так далеко от шара, что не смещаются, когда шар вносится в поле. Тогда, какое бы поле ни было в окрестности шара, оно практически останется равным \mathbf{E}_0 на большом расстоянии. Таков смысл выражения «внести шар в однородное поле». В окрестности шара полное поле \mathbf{E} не является однородным. Оно

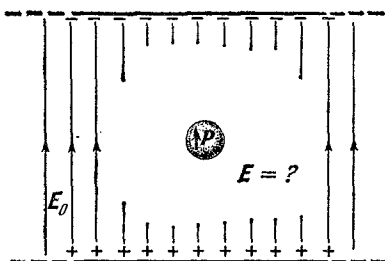


Рис. 9.28. Источники поля \mathbf{E}_0 остаются неподвижными. В диэлектрическом шаре возникает поляризация \mathbf{P} . Полное поле \mathbf{E} является суперпозицией поля \mathbf{E}_0 и поля этого поляризованного шара.

представляет собой сумму однородного поля \mathbf{E}_0 удаленных источников и поля \mathbf{E}' , созданного самим поляризованным веществом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \quad (45)$$

Поле \mathbf{E}' зависит от поляризации \mathbf{P} диэлектрика, которая в свою очередь зависит от величины поля \mathbf{E} внутри шара:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}. \quad (46)$$

Однако нам неизвестно, чему равно полное поле \mathbf{E} ; мы знаем только, что уравнение (46) должно быть справедливо в любой точке внутри шара. Если шар поляризован однородно (предположение, которое должно быть подтверждено нашими результатами), то соотношение между поляризацией шара и его собственным полем \mathbf{E}' , во всех точках внутри, уже дано уравнением (43).

(В уравнении (43) мы обозначали это поле через \mathbf{E} ; там оно было единственным полем.)

$$\mathbf{E}'_{\text{внутр}} = - \frac{4\pi\mathbf{P}}{3}. \quad (47)$$

Теперь у нас достаточно уравнений, чтобы исключить \mathbf{P} и \mathbf{E}' и получить соотношение, связывающее \mathbf{E} и \mathbf{E}_0 .