

Пользуясь уравнениями (45) — (47), получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi\mathbf{P}}{3} = \mathbf{E}_0 - \frac{\varepsilon - 1}{3} \mathbf{E}. \quad (48)$$

Решая это уравнение относительно \mathbf{E} , получим

$$\mathbf{E} = \left(\frac{3}{2 + \varepsilon} \right) \mathbf{E}_0. \quad (49)$$

Поскольку ε больше единицы, множитель $3/(2 + \varepsilon)$ будет меньше единицы; поле внутри диэлектрика слабее поля \mathbf{E}_0 . Плотность поляризации равна

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) \mathbf{E}_0. \quad (50)$$

Предполагавшуюся ранее однородность поляризации можно теперь считать очевидной*). Для вычисления полного поля \mathbf{E} вне шара мы должны взять векторную сумму \mathbf{E}_0 и поля центрального диполя с дипольным моментом, равным \mathbf{P} , умноженным на объем шара. Некоторые силовые линии поля \mathbf{E} как внутри, так и снаружи шара из диэлектрика изображены на рис. 9.29.

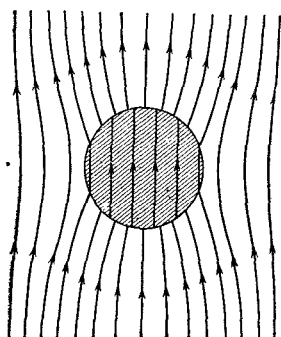


Рис. 9.29. Полное поле \mathbf{E} внутри и снаружи шара из диэлектрика.

9.12. Поле заряда в диэлектрике и теорема Гаусса

Предположим, что в очень большом объеме однородного диэлектрика расположен концентрированный заряд Q , не являющийся частью молекулярной структуры диэлектрика. Вообразим, например, что в сосуд с маслом погружен маленький маталлический заряженный шар. Как уже было сказано, электрическое поле в масле равно просто произведению $1/\varepsilon$ на поле, создаваемое зарядом Q в вакууме:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon r^2}. \quad (51)$$

Интересно посмотреть, что дает в этом случае теорема Гаусса. Поверхностный интеграл от поля \mathbf{E} (вспомните, что это поле

*) Вот почему с такой системой легко работать. Для диэлектрического цилиндра конечной длины, находящегося в однородном электрическом поле, это предположение несправедливо. Поле \mathbf{E}' однородно поляризованного цилиндра, например, с длиной, приблизительно равной его диаметру, не является однородным внутри цилиндра. (Каким оно должно быть?) Следовательно, поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ неоднородно, но в этом случае и поляризация $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ не может быть однородной. Действительно, однородная поляризация в однородном поле достигается только в диэлектриках эллипсоидальной формы, шар представляет собой частный случай такой формы.

является макроскопической величиной, образующейся в результате усреднения по объему), взятый по сфере, окружающей Q , равен $4\pi Q/\varepsilon$ — если верить уравнению (51), — а не $4\pi Q$. Чем объяснить это различие? Дело в том, что Q не является единственным зарядом внутри сосуда с маслом. Там находятся также все заряды, составляющие атомы и молекулы диэлектрика. Обычно любой объем масла электрически нейтрален. Но в данном случае масло радиально поляризовано, так как заряд Q (если он положительный) притягивает отрицательные заряды молекул масла и отталкивает положительные. Несмотря на то, что смещение в каждой молекуле может быть весьма мало, все же в среднем любая сфера, описанная вокруг Q , будет содержать больше отрицательных зарядов молекул масла, чем положительных. Таким образом, полный заряд внутри сферы, включая «сторонний» заряд Q в центре, меньше Q . Он действительно равен Q/ε .

Часто бывает удобно различать «сторонний» заряд Q и заряды, которые создает сам диэлектрик. Первый мы можем, до известной степени, контролировать — заряд можно либо добавить, либо удалить от предмета, например от пластины конденсатора. Такой заряд часто называют свободным. Остальные заряды, являющиеся неотъемлемыми частями атомов или молекул диэлектрика, называют обычно «связанными» зарядами. Лучше было бы назвать их структурными зарядами. Эти заряды не могут перемещаться, но являются более или менее упруго связанными и вносят благодаря испытываемому ими смещению вклад в поляризацию.

Можно придумать векторную величину, связанную со свободным зарядом законом, подобным закону Гаусса. В системе, которую мы только что исследовали (точечный заряд Q , погруженный в диэлектрик), таким свойством обладает вектор εE . Действительно, $\int \varepsilon E \cdot da$, взятый по некоторой замкнутой поверхности S , равен $4\pi q$, если поверхность S охватывает заряд Q , и равен нулю, если S не охватывает Q . Согласно принципу суперпозиции это должно быть справедливо для любых свободных зарядов, описываемых плотностью свободного заряда $\rho_{\text{своб}}(x, y, z)$ в бесконечной однородной диэлектрической среде:

$$\int_S \varepsilon E \cdot da = 4\pi \int_V \rho_{\text{своб}} dv, \quad (52)$$

где V представляет собой объем, ограниченный поверхностью S . Из написанного интегрального закона следует локальное соотношение между дивергенцией векторного поля εE и плотностью свободного заряда:

$$\text{div}(\varepsilon E) = 4\pi \rho_{\text{своб}}. \quad (53)$$

Так как величина ε предполагается постоянной во всей среде, уравнение (53) не содержит ничего нового. Однако оно может помочь нам выделить роль связанного заряда. Для любой системы фунда-

ментальное соотношение между электрическим полем \mathbf{E} и полной плотностью заряда $(\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}})$ остается справедливым

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi (\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}}). \quad (54)$$

Из уравнения (53) и (54) следует, что

$$\operatorname{div} (\epsilon - 1) \mathbf{E} = -4\pi \rho_{\text{связ}}. \quad (55)$$

Согласно уравнению (38) $(\epsilon - 1)\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{P}$, следовательно, уравнение (55) можно записать следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_{\text{связ}}. \quad (56)$$

Уравнение (56) является выражением того факта, что распределение связанных зарядов в любой окрестности определяется поляризацией — и больше ничем. Поэтому оно не может зависеть ни от условий где-либо в системе, ни от того, каким способом сохраняется определенное расположение связанных зарядов. Любое расположение связанных зарядов, отличающееся некоторым локальным избытком ядерных протонов по сравнению с атомными электронами, должно обладать поляризацией с определенной дивергенцией. Таким образом, уравнение (56) должно быть универсальным и справедливым не только для неограниченного диэлектрика. Вы можете получить представление о смысле уравнения (56), вообразив несколько полярных молекул, выстроенных таким образом, чтобы образовать поляризацию с положительной дивергенцией (рис. 9.30).



Рис. 9.30. Молекулярные диполи, расположенные таким образом, что $\operatorname{div} \mathbf{P} > 0$. Обратите внимание на концентрацию отрицательных зарядов в середине, соответствующую уравнению (56).

Диполи направлены наружу, что приводит к небольшой концентрации отрицательных зарядов в середине. В уравнение (56) входят только средние значения, взятые по элементам объема таких размеров, что \mathbf{P} и $\rho_{\text{связ}}$ можно считать непрерывно изменяющимися величинами.

Из (54) и (56) мы получаем

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_{\text{своб}}. \quad (57)$$

Это соотношение совершенно не зависит от того, как связаны между собой \mathbf{E} и \mathbf{P} , и не ограничивается теми веществами, которые мы называем диэлектриками, где \mathbf{P} пропорционально \mathbf{E} .

Сумму $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ принято называть специальным термином «вектор электрического смещения» и обозначать через \mathbf{D} . Следовательно, \mathbf{D} определяется равенством

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (58)$$

В изотропном диэлектрике вектор \mathbf{D} просто равен $\epsilon\mathbf{E}$, но соотношение

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{своб}} \quad (59)$$

справедливо в любом случае, когда можно определить макроскопические величины \mathbf{P} , \mathbf{E} и ρ .

Рассматривая уравнение (59), можно подумать, что \mathbf{D} следует считать векторным полем, источником которого является распределение свободных зарядов $\rho_{\text{своб}}$, так же как распределение ρ полного заряда является источником поля \mathbf{E} . Это было бы неверно. Электростатическое поле \mathbf{E} однозначно определяется, с точностью до постоянного поля, распределением зарядов с плотностью ρ , так как, кроме уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, имеется другое универсальное условие, а именно $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. В общем случае нельзя утверждать, что $\operatorname{rot} \mathbf{D} = 0$. Следовательно, значения распределения свободных зарядов недостаточно для определения \mathbf{D} с помощью уравнения (59). В качестве дополнительных условий можно взять граничные условия на различных поверхностях диэлектрика. Граничные условия для вектора \mathbf{D} являются только другим способом выражения граничных условий для \mathbf{E} и \mathbf{P} , приведенных в конце раздела 9.10.

При нашем рассмотрении электрических полей в веществе введение вектора \mathbf{D} , в общем, не приносит большой пользы и удобства. Мы упоминаем об этой величине по традиции, которая идет от Максвелла *); студенты, по всей вероятности, встретят этот термин в других книгах, где к нему относятся с большим уважением.

В заключение этого раздела приведем основные выводы об электрических полях в веществе:

1) Вещество может быть поляризовано, его состояние в макроскопическом поле полностью описывается вектором плотности поляризации \mathbf{P} , представляющим собой дипольный момент единицы объема. Вклад от такого поляризованного вещества в электрическое поле \mathbf{E} равен вкладу, который был бы создан распределением зарядов в вакууме, имеющем плотность $\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$. В частности, у поверхности поляризуемого вещества, где имеется разрыв непрерывности вектора \mathbf{P} , этот вклад сводится к поверхностному заряду плотности $\sigma = -P_n$. Прибавьте любое распределение свободных зарядов, и это электрическое поле станет полем, которое было бы создано распределением этого *полного* заряда в вакууме. Таково макроскопическое поле \mathbf{E} как внутри, так и вне вещества, причем внутри вещества оно представляет собой результат усреднения по объему истинного микроскопического поля.

*) Выдающееся положение вектора \mathbf{D} в электромагнитной теории Максвелла и выбор названия «смещение» можно, вероятно, объяснить его пристрастием к механической модели «эфира». В своей классической книге «A History of the Theories of Aether and Electricity», т. I, стр. 266 (Harper Torchbooks, New York, 1960), Уиттэкер замечает, что это пристрастие отвлекло Максвелла от правильного пути при применении его теории к задаче отражения света от диэлектрика.

2) Диэлектриком называется вещество, в котором плотность поляризации \mathbf{P} пропорциональна полю \mathbf{E} . Характеристиками диэлектрика являются электрическая восприимчивость χ_e и диэлектрическая постоянная ϵ : $\chi_e = \mathbf{P}/\mathbf{E}$, а $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$. Свободные заряды, погруженные в диэлектрик, создают в нем электрические поля в ϵ раз более слабые, чем в вакууме.

9.13. Связь между электрической восприимчивостью и атомной поляризуемостью

Отношение плотности поляризации \mathbf{P} к величине макроскопического электрического поля \mathbf{E} в веществе называется электрической восприимчивостью χ_e . Предположим, что вещество состоит из атомов с поляризуемостью α . Тогда \mathbf{P} является суммой дипольных моментов \mathbf{p} отдельных атомов, заключенных в единице объема. Мы можем найти индуцированный дипольный момент атома, если известны поляризуемость α и электрическое поле, поляризующее атом. Зная α и число атомов в единице объема N , можно определить восприимчивость χ_e . Попробуем построить теорию, связывающую χ_e и α .

Дипольный момент, индуцированный в некотором атоме A , определяется полем, создаваемым всеми посторонними источниками и действующим на атом. Это поле не идентично макроскопическому электрическому полю \mathbf{E} в окрестности атома, так как в него входят вклады зарядов самого атома. Итак, с самого начала наша задача принимает интересный оборот. Для наглядности рассмотрим весьма специфическую систему. Пусть наше вещество состоит из одинаковых атомов, расположенных в простой кубической кристаллической решетке с расстоянием между ближайшими соседями, равным b см. Поляризуемость каждого атома равна α . На рис. 9.31 изображено поперечное сечение решетки. Предполагаемое направление макроскопического поля \mathbf{E} в этой области показано искажением формы поляризованных атомов. Какова же величина поля, вызывающего это искажение? Предположим, что каждый атом расположен в своем собственном кубике и что размеры атомов гораздо меньше периода решетки b , тогда весь заряд атома находится примерно в центре кубика.

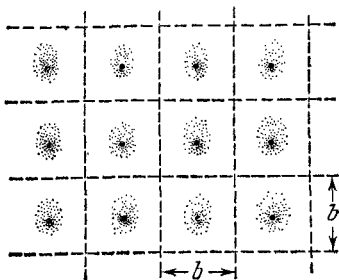


Рис. 9.31. Расположение атомов в кубическом кристалле. Все изображенные атомы поляризованы.

Обозначим через $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ поле, действующее на атом A . Источниками этого поля являются все остальные атомы системы и некоторые заряды снаружи. Поле $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ представляет собой поле, которое мы обнаружили бы в кубике A , если бы могли удалить атом A , сохранив все остальные распределения зарядов в том виде, который они