

2) Диэлектриком называется вещество, в котором плотность поляризации \mathbf{P} пропорциональна полю \mathbf{E} . Характеристиками диэлектрика являются электрическая восприимчивость χ_e и диэлектрическая постоянная ϵ : $\chi_e = \mathbf{P}/\mathbf{E}$, а $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$. Свободные заряды, погруженные в диэлектрик, создают в нем электрические поля в ϵ раз более слабые, чем в вакууме.

9.13. Связь между электрической восприимчивостью и атомной поляризуемостью

Отношение плотности поляризации \mathbf{P} к величине макроскопического электрического поля \mathbf{E} в веществе называется электрической восприимчивостью χ_e . Предположим, что вещество состоит из атомов с поляризуемостью α . Тогда \mathbf{P} является суммой дипольных моментов \mathbf{p} отдельных атомов, заключенных в единице объема. Мы можем найти индуцированный дипольный момент атома, если известны поляризуемость α и электрическое поле, поляризующее атом. Зная α и число атомов в единице объема N , можно определить восприимчивость χ_e . Попробуем построить теорию, связывающую χ_e и α .

Дипольный момент, индуцированный в некотором атоме A , определяется полем, создаваемым всеми посторонними источниками и действующим на атом. Это поле не идентично макроскопическому электрическому полю \mathbf{E} в окрестности атома, так как в него входят вклады зарядов самого атома. Итак, с самого начала наша задача принимает интересный оборот. Для наглядности рассмотрим весьма специфическую систему. Пусть наше вещество состоит из одинаковых атомов, расположенных в простой кубической кристаллической решетке с расстоянием между ближайшими соседями, равным b см. Поляризуемость каждого атома равна α . На рис. 9.31 изображено поперечное сечение решетки. Предполагаемое направление макроскопического поля \mathbf{E} в этой области показано искажением формы поляризованных атомов. Какова же величина поля, вызывающего это искажение? Предположим, что каждый атом расположен в своем собственном кубике и что размеры атомов гораздо меньше периода решетки b , тогда весь заряд атома находится примерно в центре кубика.

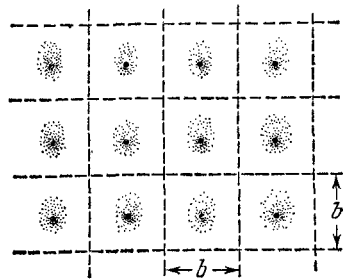


Рис. 9.31. Расположение атомов в кубическом кристалле. Все изображенные атомы поляризованы.

Обозначим через $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ поле, действующее на атом A . Источниками этого поля являются все остальные атомы системы и некоторые заряды снаружи. Поле $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ представляет собой поле, которое мы обнаружили бы в кубике A , если бы могли удалить атом A , сохранив все остальные распределения зарядов в том виде, который они

имели в присутствии атома А. Поле $E_{\text{внеш}}$ не будет полностью постоянным во всем кубике А, но можно предположить, что его средняя величина внутри кубика будет достаточно постоянной. Под средним значением по объему, охватываемому кубиком А, подразумевается, как всегда, интеграл $\int E dv$, деленный на объем кубика. Такие средние значения мы будем обозначать знаком $\langle \rangle_{\text{куб}}$.

Пусть $E_{\text{собст}}$ обозначает поле атома А. Тогда полное микроскопическое поле $E_{\text{микр}}$ в каждой точке пространства равно

$$E_{\text{микр}} = E_{\text{внеш}} + E_{\text{собств}} \quad (60)$$

Известно, что макроскопическое поле E равно среднему по пространству от микроскопического поля $E_{\text{микр}}$. Изменение $E_{\text{микр}}$, конечно, одинаково во всех кубиках. Заметим, что кубики заполняют пространство полностью, без промежутков. Следовательно, среднее значение поля $E_{\text{микр}}$ внутри одного из кубиков должно быть равно среднему значению поля в области, содержащей большое количество кубиков *). Отсюда следует, что

$$\langle E_{\text{микр}} \rangle_{\text{куб}} = E. \quad (61)$$

Но $\langle E_{\text{микр}} \rangle_{\text{куб}} = \langle E_{\text{внеш}} \rangle_{\text{куб}} + \langle E_{\text{собств}} \rangle_{\text{куб}}$, т. е. среднее значение суммы равно сумме средних значений; таким образом, величина, которую мы ищем, а именно $\langle E_{\text{внеш}} \rangle_{\text{куб}}$, дается выражением

$$\langle E_{\text{внеш}} \rangle_{\text{куб}} = E - \langle E_{\text{собств}} \rangle_{\text{куб}}. \quad (62)$$

Итак, наша задача сводится к вычислению поля $\langle E_{\text{собств}} \rangle_{\text{куб}}$, т. е. среднего значения поля атома, расположенного в кубике:

$$\langle E_{\text{собств}} \rangle_{\text{куб}} = \frac{1}{b^3} \int_{\text{по кубу}} E_{\text{собств}} dv. \quad (63)$$

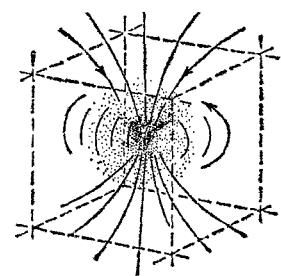


Рис. 9.32. Атом и поле $E_{\text{собств}}$, создаваемое только этим атомом.

Мы должны распространить интегрирование на все элементы объема кубика как внутри, так и снаружи распределения атомных зарядов. На рис. 9.32 показано, как может выглядеть поле $E_{\text{собств}}$. Наша задача, следовательно, является весьма трудной. Мы можем, однако, начать с вычисления среднего значения поля в кубике E_q , созданного точечным зарядом q .

Если бы точечный заряд находился в центре кубика, как показано на рис. 9.33, а, то интеграл $\int_{\text{по кубу}} E_q dv$ был бы равен нулю.

Благодаря симметрии, каждому элементу объема в кубике соответст-

*) Обдумайте это важное утверждение. Почему наличие интервалов между кубиками сделало бы его неверным?

вовал бы другой элемент, в котором поле равно по величине, но противоположно по направлению. Переместим заряд q вверх на небольшое расстояние z (рис. 9.33, б). В нижней части кубика появится тонкий слой, толщиной в $2z$, не уравновешенный слоем в верхней части. Вклад в интеграл $\int_{\text{по кубу}} E_q dv$ вносится

теперь только этим нижним слоем. Очевидно, остается вычислить только среднее E_{qz} ; E_{qx} и E_{qy} в среднем будут равны нулю. Если пренебречь небольшим изменением E_{qz} в толщине слоя, то объемный

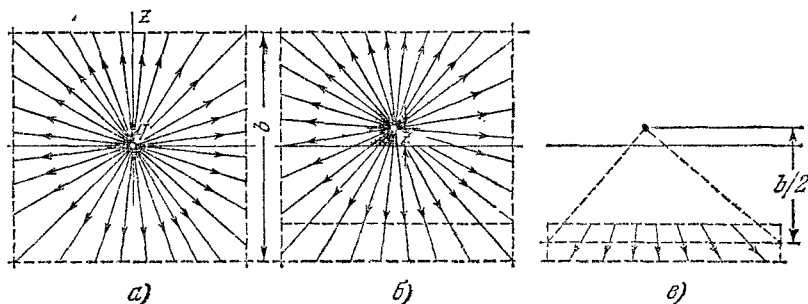


Рис. 9.33 Вычисление средней величины поля точечного заряда q , расположенного на небольшом расстоянии от центра кубика.

интеграл от E_{qz} по объему слоя равен произведению $2z$ на поверхностный интеграл от E_{qz} по квадрату, образуемому средней плоскостью слоя (рис. 9.33, в):

$$\int_{\text{по слою}} E_{qz} dv = 2z \int_{\text{по квадрату}} E_{qz} da. \quad (64)$$

Теперь можно воспользоваться законом Гаусса, так как поверхностный интеграл в уравнении (64) является как раз потоком E_q через сторону куба, в центре которого находится заряд q . Этот поток должен быть равен $4\pi q/6$, поскольку куб имеет шесть эквивалентных сторон. Отсюда следует, что

$$2z \int_{\text{по квадрату}} E_{qz} da = -2z (4\pi q/6) = -4\pi qz/3$$

и

$$\langle E_{qz} \rangle_{\text{куб}} = \frac{1}{b^3} \int_{\text{по кубу}} E_{qz} dv = -\frac{4\pi qz}{3b^3}. \quad (65)$$

Знак минус выражает тот факт, что смещение положительного заряда вверх вызывает преобладание поля в кубике, направленное вниз. Легко получить аналогичные формулы для смещения заряда в направлении оси x и y . Следовательно, малое смещение r от центра в любом направлении вызовет изменение среднего поля

кубика, равное $-4\pi q\mathbf{r}/3b^3$. Таким образом, среднее поле в кубике для атома А с его распределением зарядов $\rho(x, y, z)$ будет равно

$$\langle \mathbf{E}_{\text{собств}} \rangle_{\text{куб}} = -\frac{4\pi}{3b^3} \int \mathbf{r}\rho \, dv. \quad (66)$$

Интеграл $\int \mathbf{r}\rho \, dv$ представляет собой дипольный момент \mathbf{p} распределения зарядов ρ . (Сравните с определением дипольного момента (10).) Теперь мы имеем

$$\langle \mathbf{E}_{\text{собств}} \rangle_{\text{куб}} = -\frac{4\pi}{3b^3} \mathbf{p}. \quad (67)$$

Остальное ясно. Из уравнения (62) мы сразу получим

$$\langle \mathbf{E}_{\text{внеш}} \rangle_{\text{куб}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3b^3} \mathbf{p}. \quad (68)$$

Если добавить, что $\langle \mathbf{E}_{\text{внеш}} \rangle_{\text{куб}}$ является полем, поляризующим атом, тогда отношение \mathbf{p} к этому полю будет равно атомной поляризуемости:

$$\mathbf{p} = \alpha \langle \mathbf{E}_{\text{внеш}} \rangle_{\text{куб}}. \quad (69)$$

Из (68) и (69) можно получить соотношение, связывающее \mathbf{p} и \mathbf{E} :

$$\mathbf{p} = \alpha \left[\mathbf{E} + \frac{4\pi\mathbf{p}}{3b^3} \right]. \quad (70)$$

Это соотношение можно выразить через макроскопическую величину плотности поляризации \mathbf{P} . Так как N , число поляризованных атомов в 1 см^3 , равно $1/b^3$, то $\mathbf{P} = N\mathbf{p} = \mathbf{p}/b^3$. Подставляя значение \mathbf{P} в (70), получим

$$\mathbf{P} = N\alpha \left[\mathbf{E} + \frac{4\pi\mathbf{P}}{3} \right] \quad (71)$$

и, после преобразования,

$$\mathbf{P} = \left[\frac{N\alpha}{1 - (4\pi/3) N\alpha} \right] \mathbf{E}. \quad (72)$$

Множитель в квадратных скобках представляет собой электрическую восприимчивость χ_e .

При выводе уравнения (72) мы допустили два приближения. Во-первых, мы предположили, что все распределение атомных зарядов находится вблизи центра кубика; уравнения (65) и (66) не точны, если z или \mathbf{r} не малы по сравнению с b . Во-вторых, мы пользовались средним значением $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ по кубику, вместо значения $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ в центре кубика, для поля, поляризующего атом. Для плотной упаковки атомов, наблюдаемой в большинстве кристаллов, первое предположение не очень реалистично, а вопрос, связанный со вторым предположением, не относится к делу. Нельзя ожидать, что уравнение (72) будет в точности справедливым для реального кристалла.

Когда атомы вещества находятся на очень большом расстоянии друг от друга, так что $4\pi N\alpha/3 \ll 1$, то можно пренебречь этим членом

в знаменателе уравнения (72) и электрическая восприимчивость будет равна

$$\chi_e = N\alpha. \quad (73)$$

Такой результат мы получили бы, забыв о влиянии диполей друг на друга. Он вполне приемлем для газов нормальной плотности, где член $4\pi N\alpha/3$ имеет порядок 10^{-3} . В таких веществах геометрическое расположение атомов несущественно, — значение имеет только их число в кубическом сантиметре. Таким образом, при точном измерении диэлектрической постоянной газа при низком давлении можно определить атомную поляризуемость, не опасаясь осложнений, возникающих из-за взаимного влияния диполей. Для проверки теоретической формулы (72) можно использовать результаты измерений более плотного состояния того же вещества *).

Член $-4\pi N\alpha/3$ в знаменателе уравнения (72) отражает взаимодействие поляризованных атомов в кристалле. Очевидно, что взаимодействие атомов *увеличивает* поляризацию по сравнению с той, которая была бы без него. При серьезном подходе к этой математической формуле открывается удивительная возможность. Что, если $N\alpha$ будет столь велико, что член $4\pi N\alpha/3$ станет равен или больше единицы! Получается, что восприимчивость χ_e будет бесконечно большой, что означает поляризацию в нулевом поле. Это кажется бессмыслицей, но в действительности это не так. Некоторые известные кристаллы обладают самопроизвольной электрической поляризацией. Однако такое явление означает нечто большее, чем индуцированную поляризацию, поэтому наша теория здесь неприменима. Действительно, для того чтобы член $4\pi N\alpha/3$ стал близок к единице, расположение атомов должно быть настолько плотным, что наши приближения вообще непригодны (см. задачу 9.30).

9.14. Изменение энергии при поляризации

Чтобы зарядить конденсатор до разности потенциалов V , нужно совершить работу, равную $\frac{1}{2} CV^2$. Такое же количество энергии можно получить от конденсатора, разряжая его через внешнюю цепь. Эта энергия была запасена в заряженном конденсаторе. В гл. 2 было показано, что энергию, запасенную в любой электростатической системе, можно вычислить, считая, что энергия электрического поля равна $E^2/8\pi$ эрг/см³. Так как величина поля E в воздушном конденсаторе с параллельными пластинами с площадью пластины, равной A , равна V/t , где t — расстояние между пластинами, то $(E^2/8\pi) \times \text{объем} = V^2 A/8\pi t = CV^2/2$.

*) Можно показать, что соотношение (72) справедливо не только для кристаллов с кубической симметрией, но также и для газов, расположение атомов которых в пространстве является случайным. Лучшее экспериментальное подтверждение этого предположения следует из измерений диэлектрических постоянных газов при сравнительно большой плотности и высоком давлении (см. задачу 9.28).