

Ориентация полярной молекулы представляет собой процесс, совершенно отличный от простой деформации электронного облака. При таком процессе молекула должна поворачиваться как целое. Это напоминает, в микроскопическом масштабе, поворачивание ореха с конца на конец в сумке с орехами. Вращение отстает от вращающего момента за счет сопротивления трения, уменьшающего также амплитуду результирующей поляризации. Масштаб времени, в котором проявляется этот эффект, далеко не одинаков для различных полярных веществ. В воде «время релаксации» для переориентации диполя составляет примерно  $10^{-11}$  сек. Диэлектрическая постоянная остается близкой к 80 до частот порядка  $10^{10}$  гц.

С увеличением частоты  $\epsilon$  падает до небольшого значения, типичного для неполярной жидкости. Диполи просто не успевают следовать за изменением поля. В других веществах, особенно твердых, это характеристическое время может быть гораздо больше. Для льда, ниже точки замерзания, оно близко к  $10^{-5}$  сек. На рис. 9.36 изображено несколько экспериментальных кривых, показывающих изменение диэлектрической постоянной в зависимости от частоты для воды и льда.

Вы можете спросить, действительно ли полярная молекула может перевернуться внутри такого плотного твердого вещества, как кристалл. Это в самом деле происходит в большом количестве кристаллов, где благодаря вибрации соседних молекул молекула внезапно получает достаточно «пустого пространства», чтобы свободно повернуться. Однако вопрос является законным, так как в некоторых твердых веществах происходят такие сдвиги электрических зарядов, которые нельзя назвать вращениями собственных молекулярных дипольных моментов. Мы вскоре вернемся к этому вопросу.

## 9.17. Ток связанных зарядов

Если поляризация вещества изменяется во времени, возникает электрический ток, связанный с движением зарядов. Предположим, что в  $1 \text{ см}^3$  диэлектрика содержится  $N$  диполей и что в течение промежутка времени  $dt$  момент каждого диполя изменяется от  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ . Тогда макроскопическая плотность поляризации  $\mathbf{P}$  меняется от  $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$  до  $\mathbf{P} + d\mathbf{P} = N(\mathbf{p} + d\mathbf{p})$ .

Предположим, что изменение  $d\mathbf{p}$  вызвано смещением заряда  $q$  на расстояние  $ds$  в каждом атоме:  $qds = d\mathbf{p}$ . Тогда в течение времени  $dt$  действительно существует облако зарядов с плотностью  $Nq$ ,

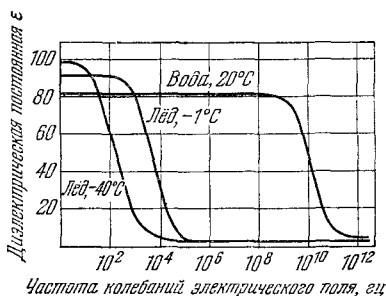


Рис. 9.36. Изменение диэлектрической постоянной воды и льда в зависимости от частоты. (Данные для воды взяты из книги С. Р. Smyth «Dielectric Behavior and Structure», McGraw-Hill, New York, 1955, а данные для льда из статьи R. P. Auty and R. H. Cole, J. Chem. Phys. 20, 1309 (1952).)

движущихся со скоростью  $v = ds/dt$ . Это движение образует ток проводимости с определенной плотностью  $\mathbf{J}$ , измеряемой в (ед. СГСЭ<sub>q/сек</sub>)/см<sup>2</sup>:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = Nq \frac{ds}{dt} = N \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (77)$$

Связь между скоростью изменения поляризации и плотностью тока  $\mathbf{J} = d\mathbf{P}/dt$  не зависит от особенностей модели. Изменяющаяся поляризация является током проводимости; различие между этим и другими токами несущественно.

Разумеется, такой ток является источником магнитного поля. Если вблизи нет других токов, мы должны написать второе уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{B} = (1/c)(\partial \mathbf{E}/\partial t + 4\pi \mathbf{J})$  следующим образом:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right). \quad (78)$$

Единственное различие между плотностью «обыкновенного» тока проводимости и плотностью тока  $\partial \mathbf{P}/\partial t$  состоит в том, что первая относится к движущимся свободным зарядам, а вторая — к связанным. Существует довольно очевидное практическое различие — нельзя получить стационарный ток связанных зарядов, который никогда бы не изменялся. Обычно предпочитают разделять ток свободных и связанных зарядов, обозначая через  $\mathbf{J}$  только плотность тока свободных зарядов. Тогда, включая в уравнение Максвелла все токи, мы должны написать его в следующем виде:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \right). \quad (79)$$

$\uparrow$   
 Плотность  
тока свя-  
занных  
зарядов

$\uparrow$   
 Плотность  
тока сво-  
бодных  
зарядов

В диэлектрической среде  $\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$  и уравнение (79) будет несколько короче:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left( \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \right). \quad (80)$$

Вводя вектор  $\mathbf{D}$ , определенный выше как  $\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ , уравнение (79) можно укоротить и написать в более общем виде:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \right). \quad (81)$$

Величина  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  обычно называется *током смещения*. В действительности часть ее, содержащая  $\partial \mathbf{P}/\partial t$ , представляет собой, как мы уже видели, «честный» ток проводимости, т. е. реальные заряды в движении. Единственной частью полной плотности тока, не отвечающей простому движению зарядов, является часть  $\partial \mathbf{E}/\partial t$ , а именно истинный ток смещения в вакууме, рассмотренный нами в конце гл. 7. Между прочим, если мы хотим выразить все компоненты

полной плотности тока в единицах, в которых измеряется  $\mathbf{J}$ , следует обратить внимание на то, что в первом члене нет  $4\pi$ , и отметить это в уравнении (79) следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} \right]. \quad (82)$$

$\uparrow$   
 Плотность  
тока  
смещения  
в вакууме

$\uparrow$   
 Плотность  
тока свя-  
занных  
зарядов

$\uparrow$   
 Плотность  
тока сво-  
бодных за-  
рядов

При обсуждении различия между связанными и свободными зарядами возникает вопрос, с которым мы еще непосредственно не сталкивались: можно ли всегда однозначно опознать «молекулярные дипольные моменты» в веществе, особенно в твердом теле?

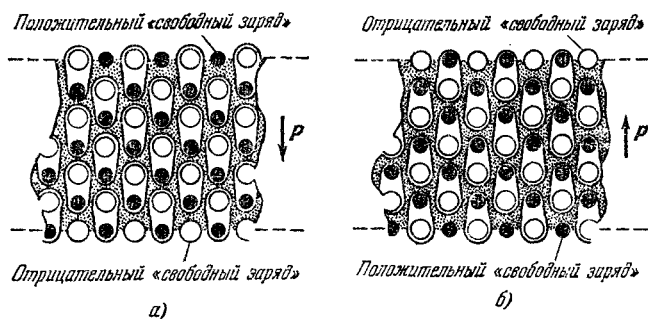


Рис. 9.37. Ионная решетка в двух представлениях: заряды сгруппированы по два, как «молекулы», причем в случае (а) вектор поляризации направлен вниз, а в случае (б) — вверх. Системы физически одинаковы, только по-разному описаны.

На этот вопрос следует ответить отрицательно. Рассмотрим микроскопическое строение тонкого слоя кристалла поваренной соли. Расположение положительных ионов натрия и отрицательных ионов хлора было показано на рис. 1.7. Рис. 9.37 представляет собой сечение кристалла, ограниченное справа и слева. При желании можно рассматривать пару смежных ионов как нейтральную молекулу с дипольным моментом. Группируя такие молекулы, как показано на рис. 9.37, а, мы получим среду с вектором однородной макроскопической плотности поляризации  $\mathbf{P}$ , направленным вниз. При этом в верхней части кристалла будет находиться слой положительных зарядов, а в нижней части слой отрицательных, причем те и другие следует рассматривать как свободные заряды, так как они не входят в состав молекул.

С таким же успехом мы могли бы сгруппировать ионы, как показано на рис. 9.37, б. При таком расположении вектор  $\mathbf{P}$  направлен вверх, слой отрицательных свободных зарядов находится в верхней части кристалла, а слой положительных свободных зарядов внизу. Оба описания являются правильными. Можно без труда найти еще одно, также правильное описание, в котором вектор  $\mathbf{P}$  будет равен

нулю и где не будет свободных зарядов. Из каждого описания следует одно и то же значение  $E$ . Макроскопическое поле  $E$  представляет собой физически наблюдаемую величину. Оно может зависеть только от распределения зарядов, а не от того, какой способ описания этого распределения мы избираем.

Этот пример показывает нам, что в реальном атомном мире различие между связанными и свободными зарядами является более или менее произвольным, и таково же, следовательно, представление о плотности поляризации  $P$ . Молекулярный диполь является

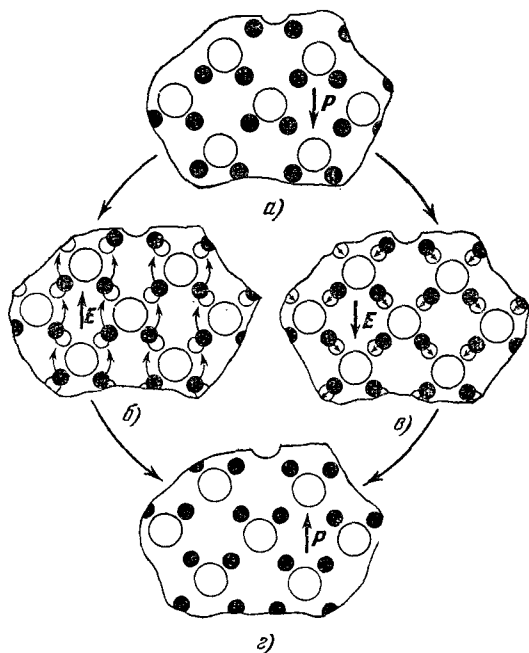


Рис. 9.38. Решетку поляризованных молекулярных групп (а) можно превратить в решетку с противоположно поляризованными группами (с) двумя способами (б или в).

определенным понятием только в тех случаях, когда можно выявить молекулы как таковые, т. е. там, где существует физическая причина для того, чтобы сказать: «Этот атом относится именно к этой молекуле, а не к другой». В большинстве кристаллов такое указание лишено смысла. Любой атом или ион может одинаково сильно взаимодействовать со всеми своими соседями; весь кристалл следует рассматривать как отдельную молекулу.

Любой произвол в разделении зарядов на свободные и связанные сказывается, естественно, на значениях плотности тока свободных зарядов  $J$  и на  $dP/dt$ . Рассмотрим поляризацию такого кристалла, как лед. Кристаллическая решетка льда является трехмерной, но на рис. 9.38 мы изобразили двумерную решетку с аналогичными свой-

ствами. Назовем ее льдом. На рис. 9.38, *a* легко можно узнать молекулы  $H_2O$ , так как около каждого атома кислорода расположены два атома Н. На рисунке изображен поляризованный кристалл. Вектор  $\mathbf{P}$  направлен вниз, потому что, как уже было сказано в этой главе, на кислородном конце молекулы воды имеет место избыток отрицательных зарядов. Черные шарики на рисунке изображают положительные заряды. Предположим теперь, что внутреннее состояние кристалла каким-то образом изменилось и стало таким, как показано на рис. 9.38, *г*, который представляет собой микроскопический разрез той же области. Диполи здесь перевернуты и вектор поляризации в кристалле направлен вверх.

Изменение внутреннего состояния кристалла может быть достигнуто двумя существенно разными способами, показанными на рис. 9.38, *б* и *в*. На рис. 9.38, *б* приложено электрическое поле  $\mathbf{E}$ , направленное кверху и перемещающее вверх положительные концы молекул, т. е. «перевертывающее» каждую молекулу. В этом случае имеет место чистое движение положительных зарядов вверх; возникающий при этом ток будет выражаться величиной  $d\mathbf{P}/dt$ , как было показано выше.

На рис. 9.38, *в* изображен совершенно другой процесс, в котором электрическое поле, направленное вниз, заставляет атомы водорода изменить положение. Каждый из них перемещается к ближайшему атому О вниз. (В реальном кристалле все это происходит проще, потому что атом Н, расположенный между двумя атомами О, до некоторой степени притягивается обоими, обеспечивая «водородную связь», которая скрепляет кристалл.) Конечная конфигурация имеет точно такой же вид. Все диполи перевернуты, но движение положительных зарядов теперь направлено вниз. Если бы в этом процессе участвовал ток, который мы могли бы включить в правую часть уравнения (79), то мы должны были бы вставить ту же величину, что и прежде,  $d\mathbf{P}/dt$ , соответствующую току, направленному вверх; но мы должны прибавить более сильный ток проводимости  $\mathbf{J}$ , направленный вниз и соответствующий движению каждого заряда вниз на расстояние, равное одному периоду решетки  $d$ . Разность будет равна реальному току, возникающему благодаря смещению положительного заряда вниз на расстояние  $d$ .

Заметьте, что в каждом случае полный ток течет в направлении приложенного электрического поля. Нельзя объяснить происходящий микроскопический процесс на основании только одних макроскопических измерений. Действительно, механизм поляризации льда является еще спорным вопросом.

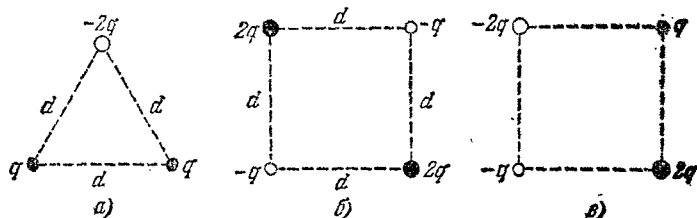
Для решения этого вопроса необходимо достаточно хорошо знать микроскопическую структуру, чтобы быть уверенными в том, что происходит в действительности: переворачивание молекулы сверху вниз или перемещение протонов. Мы должны сделать следующий простой вывод из этой главы: полный ток проводимости определяется действительным микроскопическим движением всех зарядов, как свободных, так и связанных.

## Задачи

**9.1. Изготовление конденсатора.** Имеется рулон полиэтиленовой ленты шириной 5,6 см и толщиной 0,0025 см с диэлектрической постоянной, равной 2,3, и рулон алюминиевой ленты шириной 5 см и толщиной 0,001 см. Вы хотите сделать конденсатор с емкостью около 0,05 мкф в виде плотного цилиндрического валика. Опишите, как это делать, найдите количество необходимой ленты обоих сортов и полный диаметр готового конденсатора.

**9.2. Лейденская банка.** В 1746 г. профессор Мушенброк в Лейдене заряжал воду в бутылки при помощи провода, идущего от горлышка бутылки к электростатической машине. Когда его ассистент, державший бутылку одной рукой, попробовал передвинуть другой рукой провод, он почувствовал сильный удар. Таким образом простой конденсатор привлек к себе внимание ученых-электриков. Открытие «лейденской банки» произвело революцию в опытах с электричеством. Уже в 1774 г. Бенджамин Франклин описывал свои эксперименты с «чудесной бутылкой мистера Мушенброка». Банка представляет собой простое стекло с проводниками по обеим сторонам. Чтобы понять, почему она вызвала такую сенсацию, определите емкость банки, сделанной из литровой бутылки со стенками в 2 мм толщиной; диэлектрическая постоянная стекла равна 4. Сфера какого диаметра в воздухе имела бы ту же емкость? Ответ.  $C = 830$  см.

**9.3. Какова величина дипольного момента каждого из распределений зарядов, изображенных на рис. а, б и в? Каково направление вектора дипольного момента  $p$ ?** Ответ.  $p_a = \sqrt{3} qd$ ;  $p_b = 0$ ;  $p_v = \sqrt{10} qd$ .



К задаче 9.3.

**9.4. Распределение заряда в молекуле.** В молекуле соляной кислоты расстояние между ядром хлора и протоном равно 1,28 Å. Предположим, что электрон полностью переходит от атома водорода к атому хлора и совместно с другими электронами хлора образует сферически симметричный отрицательный заряд, в центре которого находится ядро хлора. Чем отличается электрический дипольный момент этой модели от дипольного момента реальной молекулы HCl, изображенной на рис. 9.16? Где должен быть расположен настоящий «центр тяжести» распределения отрицательного заряда в реальной молекуле? (Заряд ядра хлора 17  $e$ ; заряд ядра водорода равен  $e$ .)

**9.5. Поле молекулярного диполя.** Молекула соляной кислоты расположена в начале координат с линией H — Cl вдоль оси  $z$ , и Cl наверху. Каковы направление электрического поля и его величина в единицах СГСЭ $_V$ /см в точке, расположенной на оси  $z$  на расстоянии 10 Å от начала координат? В точке на оси  $y$  на расстоянии 10 Å от начала координат?

**9.6. Поле макроскопического диполя.** Конденсатор с параллельными пластинами, емкость которого  $C = 250$  см, заряжен до разности потенциалов в 6 ед. СГСЭ $_V$ . Расстояние между пластинами равно 1,5 см. Нас интересует внешнее, так называемое «краевое» поле, которое мы обычно игнорируем. В частности, мы хотели бы определить поле на таком расстоянии от конденсатора, которое велико по сравнению с самим конденсатором. Его можно найти, если считать распределение зарядов на конденсаторе диполем. Определите величину электрического поля в точке, расположенной в трех метрах от конденсатора в плоскости пластин, и в точке, расположенной на том же расстоянии в направлении, перпендикулярном к пластинам.

**9.7. Конденсатор с утечкой.** В разделе 4.11 мы обсуждали вопрос о времени релаксации конденсатора, заполненного веществом с удельным сопротивлением  $\rho$ . Если вы вернетесь к этому разделу, то заметите, что мы уклонились от введения диэлектрической постоянной. Теперь мы можем восполнить этот пробел. Введем величину  $\epsilon$  в выражение для постоянной времени. Жизненно важный для всех нас конденсатор с утечкой, образованный стенкой живой клетки, является изолятором (одна из его многочисленных функций!), который разделяет две проводящие жидкости. Его электрические свойства особенно интересны в случае нервной ячейки, так как распространение нервного импульса сопровождается быстрыми изменениями разности потенциалов между внутренним и внешним пространством. В сноске раздела 3.5 мы указывали, что емкость конденсатора с клеточной мембраной обычно близка к  $1 \text{ мкф}$  на  $1 \text{ см}^2$  площади мембраны. Предположим, что мембрана сделана из материала с диэлектрической постоянной, примерно равной 3. Теперь вы можете себе представить ее толщину. Другие электрические измерения показали, что сопротивление  $1 \text{ см}^2$  клеточной мембраны, измеренное от одной проводящей жидкости к другой, равно приблизительно  $1000 \text{ ом}$ . Покажите, что постоянная времени такого конденсатора с утечкой не зависит от площади конденсатора. Какова величина этой постоянной в данном случае? Каково будет минимальное значение удельного сопротивления  $\rho$  материала такой мембраны на схеме рис. 4.6?

**9.8. Поляризованный шар.** Если все молекулярные диполи в капле воды с радиусом  $1 \text{ мм}$  направлены в одну сторону, то какова будет максимальная величина поля в  $10 \text{ см}$  от капли? На поверхности капли?

**9.9. Сферический проводник в однородном поле.** Формулу, выведенную нами для шара из диэлектрика, можно использовать для случая металлического шара в однородном поле. Чтобы показать это, исследуйте предельный случай  $\epsilon \rightarrow \infty$  и покажите, что форма внешнего поля в этом случае удовлетворяет граничным условиям для идеального проводника. Что можно сказать о внутреннем поле? Начертите несколько силовых линий поля для этого предельного случая. Найдите величину дипольного момента, индуцированного в проводящем шаре с радиусом  $a$  в поле  $E_0$ . Каким был бы диаметр идеально проводящего шара с такой же поляризуемостью, как у атома водорода?

**9.10.** На сколько процентов отличаются индуцированные дипольные моменты капельки воды ( $\epsilon=81$ ) и шарикоподшипника того же диаметра в том же поле? Ответ. На  $3,5\%$ .

**9.11. Еще один способ вычисления поля в поляризованном шаре.** В разделе 9.10, на основании значений потенциала на границе, было установлено, что электрическое поле внутри поляризованного шара является однородным. Этот факт можно доказать также с помощью принципа суперпозиции внутренних полей двух сферических зарядов, центры которых расположены на некотором расстоянии.

а) Покажите, что внутри сферического однородного распределения зарядов поле  $E$  пропорционально расстоянию  $g$ .

б) Возьмите два сферических распределения с плотностями  $\rho$  и  $-\rho$  с центрами в точках  $C_1$  и  $C_2$  и покажите, что результирующее поле будет постоянным и параллельным линии, соединяющей  $C_1$  и  $C_2$ .

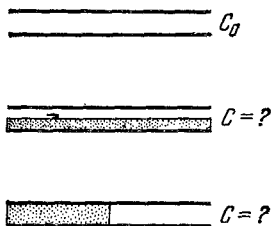
в) Исследуйте таким же образом поле длинного цилиндрического стержня, поляризованного перпендикулярно к его оси.

**9.12.** На рисунке изображены три конденсатора с одинаковыми площадями и расстояниями между пластинами. Обозначим емкость воздушного конденсатора через  $C_0$ . Каждый из двух остальных наполовину заполнен по-разному расположенным диэлектриком, с одинаковой диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Найдите емкость каждого из этих двух конденсаторов. (Краевыми эффектами можно пренебречь.) Ответ.  $C_1 = C_0 \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1}$ ,  $C_2 = C_0 \frac{\epsilon + 1}{2}$ .

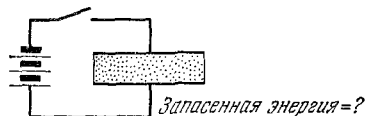
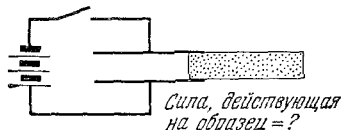
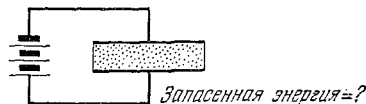
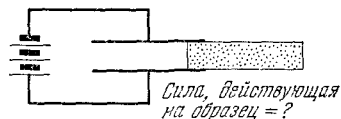
**9.13. Энергия, запасенная в конденсаторах; некоторые практические соображения.** Рассмотрим конденсатор как прибор для запасаения энергии. Практический предел разности потенциалов между пластинами конденсатора определяется величиной электрического поля, выше которого возможен пробой диэлектрика. Обычно это поле составляет около  $10^6 \text{ в/см}$  для хорошего жидкого диэлектрика с

$\epsilon = 2,3$  и плотностью  $1 \text{ г/см}^3$ . Не учитывая веса электродов, покажите, сколько джоулей энергии можно запасти на килограмм конденсатора? (Обратите внимание, что эта величина не зависит от емкости, формы, числа пластин и т. д.) Примите число джоулей на 1 килограмм за величину, характеризующую свойства резервуара энергии, и сравните конденсатор с аккумулятором автомобиля и с вращающимся маховым колесом. Для этого вы должны сделать разумные предположения относительно веса и выходной мощности аккумулятора и определить, что лимитирует скорость махового колеса. Какое преимущество имеет конденсатор, используемый в качестве резервуара энергии?

9.14. На рисунке схематически изображены два различных процесса, в каждом из которых между пластинами заряженного конденсатора вставляется пластина из диэлектрика. Вы должны проанализировать изменения энергии, ответив на вопросы на схемах. Что вы можете сказать о силе, действующей на диэлектрик?



К задаче 9.12.



К задаче 9.14.

9.15. Металлический шар с радиусом  $a$  помещен в толстый диэлектрический цилиндр с внутренним радиусом  $a$ , наружным радиусом  $b$  и с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Металлический шар несет свободный заряд  $Q$ . На диэлектрике и внутри него свободных зарядов нет. Произведите подробный анализ этой системы, определив потенциал металлического шара и распределение связанных зарядов.