

диэлектрическую пластину как некий объем бесструктурного, сплошного желе, мы будем рассматривать ее как совокупность молекул в вакууме.

Если нам удастся понять, как ведут себя электрические заряды отдельной молекулы, находящейся в электрическом поле, то мы сможем понять и поведение двух таких молекул, расположенных на определенном расстоянии друг от друга в вакууме. Для этого необходимо только знать, как влияют на каждую молекулу электрические поля, создаваемые другими молекулами. Это — проблема вакуума. Распространив полученные результаты, скажем, на 10^{20} молекул, находящихся в 1 см^3 вакуума, мы получим реальный диэлектрик. Мы надеемся сделать это, не решая 10^{20} отдельных задач.

Осуществив такую программу, мы будем вознаграждены в двух отношениях. Прежде всего мы окажемся в состоянии сказать нечто осмысленное об электрических и магнитных полях внутри вещества, ответив на вопросы, подобные поставленным выше. Наконец, что еще более ценно, мы пойдем как возникают макроскопические электрические и магнитные явления в веществе, и, следовательно, приблизимся к пониманию атомной структуры вещества.

Мы будем изучать электрические и магнитные явления отдельно. Начнем с диэлектриков. Поскольку нашей первой целью является описание электрического поля, создаваемого атомом или молекулой, полезно начать с рассмотрения электростатического поля, создаваемого небольшой системой зарядов.

9.2. Моменты распределения зарядов

Атом (или молекула) состоит из электрических зарядов, занимающих небольшой объем пространства, близкий к нескольким кубическим ангстремам (10^{-24} см^3).

Нас интересует электрическое поле вне этого объема, возникающее благодаря довольно сложному распределению зарядов. Особенно важно для нас поле на таких расстояниях от источника, которые велики по сравнению с размерами самого источника.

Какие основные особенности структуры заряда определяют поле в удаленных точках? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим некоторое произвольное распределение зарядов и выясним, как можно вычислить поле в точке, внешней по отношению к этому распределению зарядов. На рис. 9.2 показано некоторое распределение зарядов, расположенных вблизи начала координат. Это может быть молекула, состоящая из нескольких положительных ядер и соответствующего числа электронов. Во всяком случае, мы предположим, что это распределение описывается заданной плотностью заряда $\rho(x, y, z)$. Величина ρ является отрицательной там, где находятся электроны, и положительной в ядрах. Для определения электрического поля в удаленных точках можно начать с вычисления потенциала от заданного распределения зарядов. Для примера возьмем некоторую точку A на оси z . (Так как мы не предполагали

специальной симметрии в распределении зарядов, то на направление оси z не наложено никаких специальных условий.) Обозначим расстояние точки A от начала координат через r . Электрический потенциал в точке A , обозначаемый через Φ_A , определяется, как обычно, суммированием вкладов от всех элементов распределения зарядов:

$$\Phi_A = \int \frac{\rho(x', y', z') dv'}{R}. \quad (3)$$

В подынтегральном выражении элемент объема внутри распределения зарядов обозначается через dv' , плотность заряда — через $\rho(x', y', z')$ и расстояние от точки A до этого элемента заряда, стоящее в знаменателе, обозначено через R . Интегрирование производится, конечно, по координатам x', y', z' во всей области, содержащей заряды. Расстояние R можно выразить через r и расстояние r' от начала координат до элемента заряда в объеме dv' . Обозначая через θ угол между r' и осью z , на которой находится точка A , получим

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{1/2}. \quad (4)$$

Подставляя это выражение для R в интеграл, получим

$$\Phi_A = \int \rho dv' [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2}. \quad (4a)$$

Рис. 9.2. Вычисление потенциала в точке A от распределения зарядов в молекуле.

Вспользуемся тем, что для далекой точки, подобной A , r' значительно меньше r для всех точек распределения зарядов, и разложим квадратный корень в уравнении (4) в ряд по степеням r'/r . Запишем

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2} \quad (5)$$

и, применяя разложение $(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \delta + \frac{3}{8} \delta^2 \dots$, получим, суммируя члены с одинаковой степенью r'/r :

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \right. \\ \left. + (\text{члены высших степеней}) \right]. \quad (6)$$

Поскольку r при интегрировании величина постоянная, мы можем вынести ее за знак интеграла и записать выражение для

потенциала в точке A в следующем виде:

$$\Phi_A = \frac{1}{r} \int \underbrace{\rho dv'}_{K_0} + \frac{1}{r^2} \int \underbrace{r' \cos \theta \rho dv'}_{K_1} + \frac{1}{r^3} \int \underbrace{r'^2 \cdot \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \rho dv'}_{K_2} + \dots \quad (7)$$

Величина каждого из интегралов K_0, K_1, K_2 и т. д., зависит только от особенностей распределения зарядов. Следовательно, потенциал для всех точек вдоль оси z можно представить в виде степенного ряда $1/r$ с постоянными коэффициентами:

$$\Phi_A = \frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \quad (8)$$

Для завершения задачи нам нужно было бы получить потенциал во всех других точках, чтобы иметь возможность вычислить электрическое поле как $-\text{grad } \Phi$. Однако и сейчас мы знаем достаточно, чтобы сделать существенно важный вывод: поведение потенциала на больших расстояниях от источника будет определяться первым членом этого ряда, коэффициент при котором не равен нулю.

Рассмотрим эти коэффициенты более внимательно. Коэффициент K_0 равен $\int \rho dv'$, что представляет собой полный заряд системы.

Если количества положительных и отрицательных зарядов равны, как в нейтральной молекуле, то коэффициент K_0 будет равен нулю. Для однократно ионизованной молекулы коэффициент K_0 будет равен e . Если K_0 не равен нулю, то величина коэффициентов K_1, K_2 и т. д. не имеет значения; при достаточно большом расстоянии от системы превалирует член K_0/r . Поэтому значение потенциала приближается к потенциалу от точечного заряда, расположенного в начале координат, — то же справедливо и для поля. Все это достаточно ясно.

Предположим, что наша молекула нейтральна, так что коэффициент K_0 равен нулю. Тогда мы должны рассмотреть второй член с коэффициентом

$$K_1 = \int r' \cos \theta \rho dv'.$$

Так как величина $r' \cos \theta$ равна просто z' , то этот член характеризует относительное смещение положительного и отрицательного зарядов в направлении точки A . Он отличен от нуля для распределений, изображенных на рис. 9.3, где распределения положительных и отрицательных зарядов изображены отдельно. Действительно, все показанные на рисунке системы имеют приблизительно одно и то же значение K_1 .

Полезно заметить, что если система зарядов в целом нейтральна, то значение K_1 не зависит от положения начала координат. Действительно, если мы заменим z' на $(z' + z'_0)$, переместив таким

образом начало координат, то значение интеграла не изменится: $\int (z' + z'_0) \rho dv' = \int z' \rho dv' + z'_0 \int \rho dv'$, а последний интеграл для нейтральной системы зарядов всегда равен нулю.

Очевидно, что если $K_0=0$, а $K_1 \neq 0$, то потенциал вдоль оси z будет асимптотически изменяться как $1/r^2$ (такое приближение будет

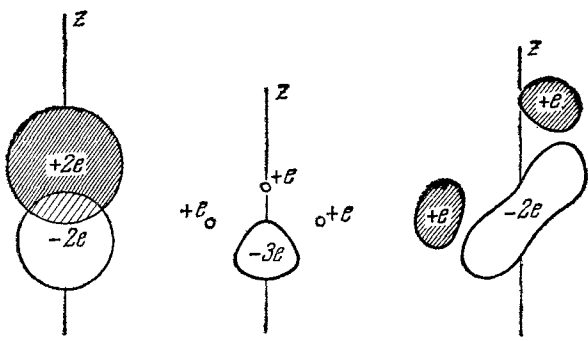


Рис. 9.3. Некоторые распределения зарядов с $K_0=0$, $K_1 \neq 0$. Это означает, что в каждом распределении полный заряд равен нулю, а дипольный момент отличен от нуля.

тем точнее, чем на большие расстояния мы удаляемся). Величина электрического поля будет вести себя асимптотически как $1/r^3$, в противоположность зависимости $1/r^2$ для поля точечного заряда. Мы рассматриваем, конечно, только потенциал на оси z и вернемся к вопросу о точной форме поля после того, как получим общее представление о ситуации.

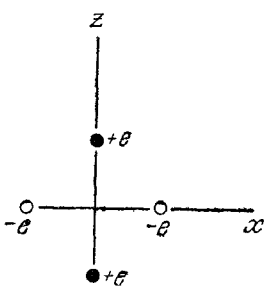


Рис. 9.4. Для такого распределения зарядов $K_0=K_1=0$, а $K_2 \neq 0$. Это распределение с квадрупольным моментом, отличным от нуля.

Когда оба коэффициента, K_0 и K_1 , равны нулю, а коэффициент K_2 не равен нулю, то потенциал на больших расстояниях будет вести себя как $1/r^3$, а величина поля будет падать как $1/r^4$. На рис. 9.4 изображено распределение зарядов, для которого и K_0 и K_1 равны нулю (эти коэффициенты равны нулю при любом выборе направления оси z), в то время как коэффициент K_2 не равен нулю.

Величины K_0, K_1, K_2, \dots связаны с так называемыми *моментами* распределения зарядов. Пользуясь этой терминологией, мы называем величину K_0 , являющейся просто полным зарядом, *монопольным моментом* или силой монополя. K_1 представляет собой компоненту *дипольного момента* распределения. Дипольный момент имеет размерность заряда, умноженного на смещение, и является вектором, а коэффициент K_1 — его z -компонентой. Третья величина, K_2 , относится

к *квадрупольному* моменту распределения, следующий коэффициент — к *октупольному* моменту и т. д.*).

Описание распределения зарядов с помощью такой иерархии моментов удобно тем, что помогает выделить как раз те особенности распределения зарядов, которые определяют поле на большом расстоянии. Если бы нас интересовало только поле в непосредственной близости от распределения, то такое описание было бы бесполезным. Для нашей основной задачи, т. е. для понимания того, что происходит в диэлектрике, имеет значение только величина *монопольного* (полного заряда) и *дипольного* моментов молекул. Все другие моменты можно игнорировать. Если молекулы, образующие наше вещество, нейтральны, мы можем ограничиться рассмотрением только *дипольных* моментов.

9.3. Потенциал и поле диполя

Вклад диполя в потенциал в точке A , находящейся на расстоянии r от начала координат, дается выражением $(1/r^2) \int r' \cos \theta \rho dv'$. Вместо величины $r' \cos \theta$, являющейся проекцией \mathbf{r}' на направление к точке A , можно написать $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$. Таким образом, выражение для потенциала, без ссылки на произвольную ось z , будет иметь вид

$$\varphi_A = \frac{1}{r^2} \int \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \rho dv' = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int \mathbf{r}' \rho dv'. \quad (9)$$

Это выражение дает величину потенциала в любой точке. Интеграл в уравнении (9) является *дипольным моментом* распределения зарядов. Он представляет собой вектор, имеющий размерность заряда, умноженного на расстояние. Обозначим вектор дипольного момента через \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho dv'. \quad (10)$$

С помощью вектора дипольного момента \mathbf{p} уравнение (9) можно записать так:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2}. \quad (11)$$

Электрическое поле равно градиенту этого потенциала, взятому со знаком минус. Чтобы выяснить, что представляет собой поле диполя, расположим диполь \mathbf{p} в начале координат и направим его

*) Можно показать, что разложение источника на различные мультиполи однозначно определяет распределение зарядов. Другими словами, если нам известны силы всех мультиполей, мы можем «в принципе» получить $\rho(x', y', z')$. Квадрупольный момент и моменты высших порядков не являются векторами, а представляют собой более сложные образования.