

кулы  $\text{H}_2\text{O}$  не является капризом природы. Такая структура молекулы, состоящей из атома с восемью электронами, соединенного с двумя атомами с одним электроном каждый, обоснована законами квантовой механики. Поведение диэлектрика, состоящего из полярных молекул, поразительно отличается от поведения диэлектрика из неполярных молекул. Диэлектрическая постоянная воды равна приблизительно 80, метилового спирта 33, в то время как диэлектрическая постоянная типичной неполярной жидкости близка к 2. Электрическое поле, приложенное к неполярному веществу, индуцирует в каждой молекуле небольшой дипольный момент. В полярном веществе всегда имеются достаточно сильные диполи, но при

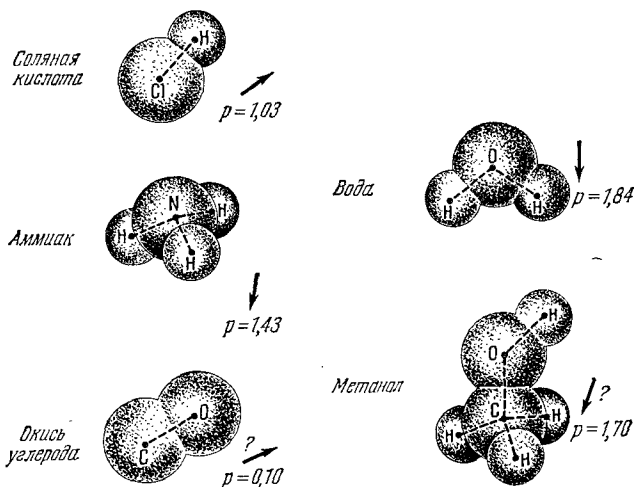


Рис. 9.16. Несколько известных полярных молекул. Величины «собственных» дипольных моментов  $p$  даны в единицах  $10^{-18}$  ед. СГСЭ<sub>д</sub>. см.

отсутствии внешнего поля они направлены случайным образом и поэтому не вызывают явлений макроскопического масштаба. Приложенное электрическое поле только ориентирует — в некоторой степени — постоянные дипольные моменты. В обоих типах диэлектриков макроскопические эффекты определяются, однако, полной поляризацией, приходящейся на единицу объема.

## 9.8. Электрическое поле, созданное поляризованным веществом

Предположим, что мы создаем какой-то кусок вещества, собирая очень большое количество молекул в первоначально пустую область пространства. Предположим также, что все эти молекулы поляризованы в одном и том же направлении.

Пока нас не интересует ни природа молекул, ни средства, с помощью которых сохраняется их поляризация. Мы рассматриваем только электрическое поле, вызываемое молекулами, когда они

находятся в этом состоянии; позднее мы включим в рассмотрение любые поля от других источников, которые могут находиться в окрестности. Если угодно, можно вообразить, что речь идет о молекулах с постоянными дипольными моментами, которые расположены параллельно друг другу и застыли в таком положении. Все, что нам нужно знать, — это число диполей  $N$  на кубический сантиметр и момент каждого диполя  $p$ . Предположим, что  $N$  настолько велико, что любой макроскопически малый объем  $dv$  содержит еще большее количество диполей. Полный дипольный момент в таком объеме равен  $pN dv$ . В любой точке, расстояние которой от этого элемента

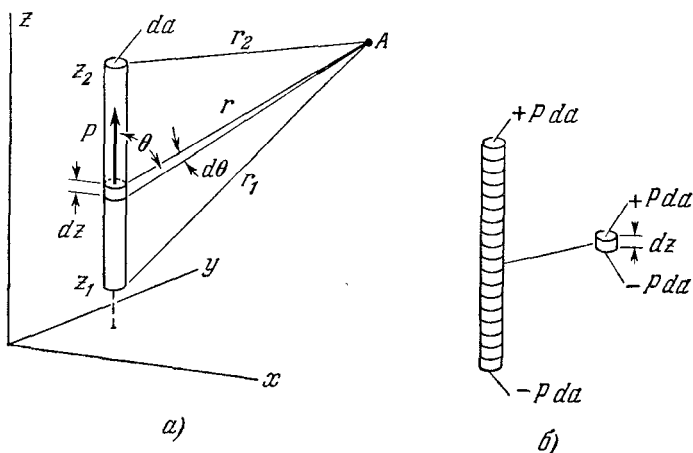


Рис. 9.17. Столбик из поляризованного вещества (а) создает такое же поле в любой внешней точке  $A$ , как два заряда, расположенных на концах столбика (б).

объема велико по сравнению с его размерами, электрическое поле от находящихся в объеме диполей будет практически таким же, как поле заменяющего их единичного дипольного момента величиной  $pN dv$ . Назовем произведение  $pN$  плотностью поляризации и обозначим его через  $\mathbf{P}$ . Это — векторная величина с размерностью заряд·см/см<sup>3</sup>, или заряд·см<sup>2</sup>. Тогда  $\mathbf{P} dv$  является дипольным моментом малого элемента объема  $dv$ . С помощью этого дипольного момента можно вычислить электрическое поле на некотором расстоянии от  $dv$ . Заметим, что наше вещество составлено только из нейтральных молекул; полный заряд системы или даже отдельной молекулы равен нулю, так что мы должны рассматривать в качестве источников далекого поля только дипольные моменты.

На рис. 9.17 изображен тонкий столбик (или цилиндр) такого поляризованного вещества. Поперечное сечение столбика равно  $da$ , а по вертикали его размеры ограничены координатами  $z_1$  и  $z_2$ . Плотность поляризации  $\mathbf{P}$  в столбике постоянна и направлена в положительном направлении оси  $z$ . Нам нужно вычислить электрический потенциал, созданный этим столбиком поляризованного

вещества, в некоторой внешней точке. Элемент цилиндра высотой  $dz$  имеет дипольный момент  $P da dz = P da dz$ . Его вклад в потенциал в точке  $A$  можно записать на основании формулы (12) для потенциала диполя следующим образом:

$$d\varphi_A = \frac{P da dz \cos \theta}{r^2}. \quad (27)$$

Потенциал, обусловленный всем столбиком, равен

$$\varphi_A = P da \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz \cos \theta}{r^2}. \quad (28)$$

Это выражение проще, чем кажется:  $dz \cos \theta$  равно  $-dr$ , таким образом, подинтегральное выражение является полным дифференциалом  $d(1/r)$ . После интегрирования получаем

$$\varphi_A = P da \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (29)$$

Уравнение (29) полностью идентично выражению для потенциала в точке  $A$ , создаваемого двумя точечными зарядами: положительным зарядом величины  $P da$ , расположенным на вершине столбика на расстоянии  $r_2$  от  $A$ , и отрицательным зарядом той же величины на нижней части столбика. Источник, состоящий из столбика однородно поляризованного вещества, эквивалентен двум концентрированным зарядам, по крайней мере в отношении его поля, во всех внешних точках.

Это положение можно строго доказать иначе, без всякой математики. Рассмотрим элемент столбика высотой  $dz$ , имеющий дипольный момент, равный  $P da dz$ . Заменяем его неполяризованным изолятором того же размера и формы и поместим заряд  $+P da$  на верхнюю часть этого элемента столбика и заряд  $-P da$  на нижнюю. Теперь этот маленький элемент имеет тот же дипольный момент, как элемент нашего первоначального столбика, и, следовательно, вносит такой же вклад в поле в любой удаленной точке  $A$ . (Поле внутри нашего заместителя или очень близко от него может отличаться от поля оригинала, — для нас это не имеет значения.) Теперь возьмем ряд таких элементов и поставим их друг на друга, чтобы получить столбик, похожий на поляризованный. Этот ряд элементов должен создать такое же поле в точке  $A$ , как целый столбик, так как каждый элемент вносит такой же вклад, как его двойник в оригинале (рис. 9.17, б). Посмотрим теперь, что у нас получилось! В месте каждого соединения положительный заряд вершины одного из элементов совпадает с отрицательным зарядом нижней части элемента, находящегося над ним, так что суммарный заряд равен нулю. Некомпенсированными остаются только отрицательный заряд  $-P da$  у основания нижнего элемента и положительный заряд  $+P da$  на вершине верхнего элемента. Они кажутся точечными зарядами, если смотреть на них из удаленной точки, такой, на-

пример, как  $A$ ; следовательно, мы пришли к выводу, что два таких заряда создают в точке  $A$  в точности такое же поле, как наш столбик поляризованного вещества.

Без дальнейших вычислений можно распространить эти рассуждения на пластину или прямой цилиндр любых размеров, равномерно поляризованный в направлении, перпендикулярном к их параллельным сторонам (рис. 9.18,  $a$ ). Пластину можно просто разделить на некоторое количество столбиков (полосок), и внешний потенциал будет равен сумме вкладов столбиков, каждый из которых можно заменить зарядом на обоих концах. Заряды  $P da$  на концах

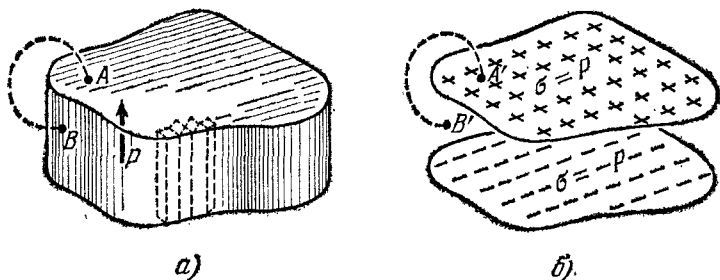


Рис. 9.18. Внешние поля пластины из поляризованного материала ( $a$ ) и двух заряженных слоев ( $b$ ) эквивалентны.

каждого столбика площадью  $da$  образуют однородный слой поверхностного заряда плотностью  $\sigma = P$  ед. СГСЭ<sub>q</sub> на единицу площади. Следовательно, потенциал всюду вне однородно поляризованной пластины или цилиндра будет точно такой же, как от двух слоев поверхностных зарядов с постоянной плотностью  $\sigma = +P$  и  $\sigma = -P$ , расположенных на верхней и нижней поверхностях пластины (рис. 9.18,  $b$ ).

Пока что мы ничего не можем сказать о поле внутри пластины. Однако нам известны потенциалы во всех точках на поверхности пластины, сверху, снизу, со всех сторон. Любые две точки  $A$  и  $B$ , находящиеся на противоположных поверхностях, можно соединить линией, проходящей целиком во внешнем поле, так что линейный интеграл  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  полностью определен этим полем. Он должен быть равен интегралу по пути  $A'B'$  на рис. 9.18,  $b$ . Точка, расположенная непосредственно на поверхности диэлектрика, должна быть вне действия интенсивных молекулярных полей, т. е. «ближнего поля» молекулы, которое мы не принимали во внимание. Условимся определять границу диэлектрика как поверхность, находящуюся на достаточно большом расстоянии от самого близкого к поверхности атомного ядра,— 10 или 20 Å будет достаточно. При этом «ближние поля» отдельных атомов в любой точке вне этой границы будут вносить пренебрежимо малый вклад в линейный интеграл от  $A$  до  $B$ .

Имея это в виду, рассмотрим тонкую и широкую пластину поляризованного вещества толщиной  $t$ , поперечное сечение которой

изображено на рис. 9.19, а. На рис. 9.19, б показаны поперечные сечения двух эквивалентных заряженных слоев.

Поле, создаваемое системой из двух заряженных слоев в пространстве по обеим сторонам слоев и между ними, нам известно. Поле между слоями далеко от краев равно  $4\pi\sigma$  и направлено вниз, а разность потенциалов между точками  $A'$  и  $B'$  равна, следовательно,  $4\pi\sigma t$  ед. СГСЭС<sub>V</sub>. Точно такая же разность потенциалов должна быть между соответствующими точками  $A$  и  $B$

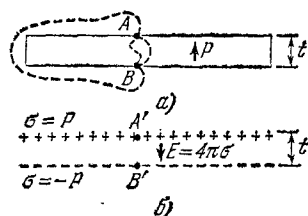


Рис. 9.19. а) Линейный интеграл от  $E$  на пути от  $A$  до  $B$  должен быть одинаковым для всех путей, внутренних и внешних, так как внутренние («микроскопическое», или «атомное») электрические поля также консервативны ( $\text{rot } E=0$ ). Эквивалентные заряженные слои (б) имеют такое же внешнее поле.

которая равна  $4\pi\sigma t$  или  $4\pi Pt$ . Это должно быть так, поскольку внесение атомных зарядов, независимо от их распределения, не может изменить консервативного характера электрического поля, выраженного в утверждении, что  $\int E \cdot ds$  не зависит от пути или  $\text{rot } E=0$ .

Мы знаем, что на рис. 9.19, б разность потенциалов между верхним и нижним слоями приблизительно постоянна, за исключением краев, так как внутреннее электрическое поле является практически однородным. Следовательно, в центральной области нашей поляризованной пластины разность потенциалов между верхней и нижней поверхностями также должна быть величиной постоянной.

В этой области линейный интеграл  $\int_A^B E \cdot ds$ , взятый от любой точ-

ки  $A$  на верхней поверхности пластины до любой точки  $B$  на нижней поверхности по любому пути, должен иметь одно и то же значение  $4\pi Pt$ . На рис. 9.20 приведено «увеличенное изображение» центральной области пластины, на котором поляризованные молекулы напоминают молекулы  $H_2O$  и все одинаково ориентированы. Мы не пытались изобразить сильные поля, существующие между молекулами и внутри них. (На расстоянии в  $10\text{\AA}$  от молекулы воды ее поле составляет несколько сотен киловольт на сантиметр, в чем можно убедиться с помощью табл. 9.1 и уравнения (14).) Представьте себе некоторые довольно сложные конфигурации полей в окрестности каждой молекулы. Величина  $E$ , которая входит

на нашей поляризованной пластине, потому что полное внешнее поле в обеих системах одно и то же.

Совпадают ли поля также и внутри? Конечно, нет, так как пластина, в отличие от модели, заполнена положительными ядрами и электронами, с полями в миллионы вольт на сантиметр, направленными различным образом. Существует, однако, величина, которая является для них одинаковой. Это — линейный интеграл от поля, вычисленный по любому внутреннему пути от  $A$  до  $B$ ; он должен быть равен  $\varphi_B - \varphi_A$ , что, как мы видим, равно величине  $\varphi_B - \varphi_A$ ,

в интеграл  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ , является полным электрическим полем в данной точке пространства, внутри или вне молекулы; вышеупомянутые сложные и интенсивные поля входят в это поле. Итак, мы пришли к замечательному выводу, что любой путь через этот сумбур зарядов и полей, огибающий молекулы или проходящий сквозь них, должен дать одинаковое значение линейного интеграла, а именно то значение, которое мы определили в системе, изображенной на рис. 9.19, б, где поле совершенно однородно и имеет величину, равную  $4\pi\mathbf{P}$ . Это означает, что усредненное по объему

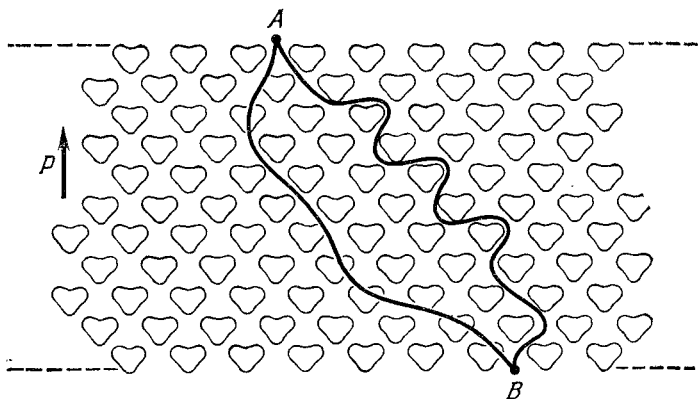


Рис. 9.20. Линейный интеграл реального микроскопического поля по любому пути от  $A$  до  $B$  имеет одно и то же значение.

электрическое поле внутри нашей поляризованной пластины должно быть равно  $-4\pi\mathbf{P}$ . Под усредненным по некоторому объему  $V$  значением поля  $\mathbf{E}$ , которое мы обозначим через  $\langle \mathbf{E} \rangle_V$ , мы понимаем следующую величину:

$$\langle \mathbf{E} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E} dv. \quad (30)$$

Один из способов беспристрастного исследования поля в большом количестве равных малых элементов объема  $dv$ , на которые можно разделить весь объем  $V$ , заключается в измерении поля вдоль каждой линии в «пучке» тесно расположенных параллельных линий. Мы только что убедились в том, что линейный интеграл от  $\mathbf{E}$  вдоль любого из таких путей является таким же, как если бы мы имели дело с постоянным электрическим полем величиной  $-4\pi\mathbf{P}$ . Отсюда следует, что  $\langle \mathbf{E} \rangle = -4\pi\mathbf{P}$ .

Это среднее поле является величиной макроскопической. Объем, по которому мы производим усреднение, должен быть достаточно большим, чтобы содержать очень много молекул, в противном случае это среднее будет сильно изменяться от одного такого объема к другому. Среднее поле  $\langle \mathbf{E} \rangle_V$ , определенное уравнением (30), яв-

ляется действительно единственным типом макроскопического электрического поля внутри диэлектрика, о котором можно говорить. Только это поле дает возможность удовлетворительно ответить на вопрос, возникающий при макроскопическом описании вещества: «Что представляет собой электрическое поле внутри диэлектрика?»

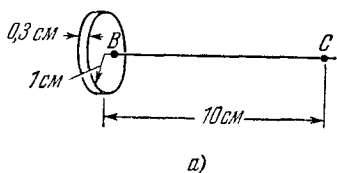
Величину  $E$  под интегралом в правой части уравнения (30) можно назвать микроскопическим полем. Если мы заставим кого-нибудь измерять значения полей, необходимые для вычисления линейного интеграла, ему придется измерять электрические поля в вакууме, естественно, при наличии электрического заряда. Для этого необходимы приборы очень малого размера, так как требуется измерить поле в определенной точке вблизи определенной молекулы. Имеем ли мы право говорить о линейном интеграле от  $E$  вдоль некоторого пути, который огибает юго-западный угол определенной молекулы и затем проходит сквозь соседнюю молекулу? Да, и это является сильным доводом в пользу предположения, что законы электромагнетизма продолжают оставаться верными вплоть до расстояний, которые гораздо меньше атомных размеров. Можно даже дать описание опыта для измерения среднего от микроскопического электрического поля вдоль пути, определенного в пределах размеров атома. Опыт заключается в бомбардировке вещества заряженной частицей, имеющей большую энергию, например, альфа-частицей. По полному изменению ее импульса можно судить о среднем электрическом поле, которое действует на нее вдоль пути.

Разберем численный пример с поляризованным веществом. Представим себе диск радиусом  $1\text{ см}$  и толщиной  $0,3\text{ см}$  (рис. 9.21, а). Пусть плотность молекул в диске равна  $3 \cdot 10^{22}$  молекул/см<sup>3</sup>. Предположим, что все молекулы являются полярными и что дипольный момент каждой равен  $1,8 \cdot 10^{-18}$  ед. СГСЭ<sub>q</sub>·см. Далее — и это весьма смелое предположение — примем, что все они расположены по прямой линии, как молекулы на рис. 9.20, и что их дипольные моменты направлены одинаково, параллельно оси диска. Нас интересует поле в точке  $A$  внутри диска, в точке  $B$  вблизи диска и в точке  $C$  на расстоянии  $10\text{ см}$  по оси. Плотность поляризации  $P$  имеет величину

$$P = Np = (3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}) \times (1,8 \cdot 10^{-18} \text{ ед. СГСЭ}_q \cdot \text{см}) = 5,4 \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭ}_q / \text{см}^2. \quad (31)$$

Эквивалентные заряженные слои изображены на рис. 9.21, в. Если считать, что эти слои простираются в бесконечность, то поле в точке  $A$  между ними будет просто равно  $4\pi\sigma$ , или  $6,8 \cdot 10^5$  ед. СГСЭ<sub>v</sub>/см. В данном случае это будет довольно хорошим приближением, так как расстояние между слоями мало по сравнению с их диаметром. На самом деле поле будет несколько меньше. Поле снаружи в точке  $B$  для бесконечно длинных слоев было бы равно нулю, но в действительности будет иметь сравнительно небольшую величину и будет направлено вправо. Разрыв в  $E$  у положительного слоя

будет равен точно  $4\pi\sigma$  или  $4\pi P$ . Если нам нужно вычислить точное значение поля в точках  $A$  или  $B$ , мы можем воспользоваться формулой, выведенной в гл. 2 для поля диска с поверхностным зарядом, и сложить поля от двух соответствующим образом расположенных дисков. Для оценки поля в удаленной точке, подобной  $C$ , мы должны



знать полный дипольный момент взятого вещества. Распределение отдельных диполей, если смотреть из точки  $C$ , не может иметь большого значения и действие диска будет

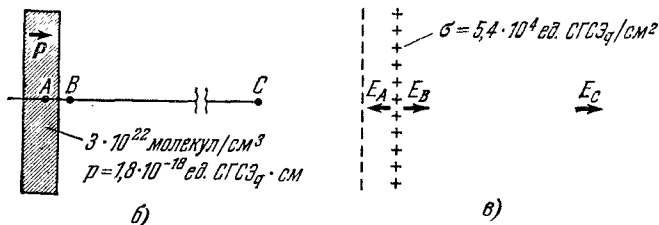


Рис. 9.21. а) Диск, состоящий из полярных молекул с дипольными моментами, направленными параллельно оси. б) Поперечное сечение диска. в) Поперечное сечение эквивалентных заряженных слоев.

аналогично действию единичного диполя с величиной  $p_{\text{полн}} = \text{объем} \cdot P = 0,942 \text{ см}^3 \cdot 5,4 \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭг/см}^2 = 5,1 \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭг} \cdot \text{см}$ . Поле на оси такого диполя на расстоянии  $10 \text{ см}$  равно

$$E_C = \frac{2p_{\text{полн}}}{r^3} = \frac{10,2 \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭг} \cdot \text{см}}{(10 \text{ см})^3} = 102 \text{ ед. СГСЭВ/см}. \quad (32)$$

## 9.9. Конденсатор, заполненный диэлектриком

Мы уже имели дело с конденсатором, заполненным диэлектриком, но только теперь можем воспользоваться нашим пониманием свойств диэлектрика. Рассмотрим сначала две находящиеся в вакууме проводящие пластины с зарядами  $-Q$  на верхней пластине и  $+Q$  на нижней. На рис. 9.22 изображено поперечное сечение конденсатора, представленного на рис. 9.1, а, с которого началась эта глава. Поле между пластинами  $E_0$  равно  $4\pi Q/A$  и направлено вверх. Разность потенциалов между пластинами  $\varphi_{12}$  равна  $4\pi Qt/A$ . Емкость  $C_0$  незаполненного диэлектриком конденсатора выражается известной формулой:

$$C_0 = \frac{Q}{\varphi_{12}} = \frac{A}{4\pi t}. \quad (33)$$

Поместим теперь между пластинами диэлектрик. Поле поляризует его атомы или молекулы. Мы не можем (на этом этапе) предсказать величину индуцированного дипольного момента каждой моле-