ДОПОЛНЕНИЯ

Д. 1. Примеры микроскопических слабо связанных идентичных осцилляторов

Начните с п. 1.5 (прочтите о слабо связанных маятниках и «Примеры из квантовой физики»), который является введением в эту тему.

Мы рассмотрим здесь несколько примеров слабо связанных осцилляторов из атомной физики и физики элементарных частиц. В каждом примере система имеет две идентичные степени свободы, которые слабо связаны, так что существуют нормальные моды колебаний с частотами ω_1 и ω_2. Законы механики Ньютона для микроскопических систем несправедливы, и для понимания их свойств требуется знание квантовой механики. Тем не менее в поведении микроскопических систем имеется большое математическое подобие поведению систем из слабо связанных маятников, хотя физическая интерпретация в обоих случаях различна. Для связанных маятников квадрат амплитуды маятника пропорционален энергии (кинетической плюс потенциальной) маятника. Энергия «перетекает» от одного маятника к другому с частотой биений. Для систем, описываемых квантовой механикой, квадрат амплитуды для определенной степени свободы (амплитуда в квантовой механике — всегда комплексная величина и под квадратом амплитуды подразумевается квадрат ее модуля) дает вероятность того, что степень свободы «возбуждена» (т. е. имеет всю энергию). Вероятность «течет» туда и обратно от одной степени свободы к другой с частотой биений $\nu_1-\nu_2$. Сама энергия квантована, и мы не можем ввести понятие об ее потоке. В случае маятников полная энергия обоих маятников постоянна. Для микроскопических систем соответствующим фактом является то, что полная вероятность возбуждения либо одной, либо другой степени свободы постоянна. (Эта полная вероятность равна единице при условии, что система не теряет каким-либо образом энергию возбуждения.) Ниже мы приведем два замечательных примера, с которыми вы снова встретитесь при изучении квантовой механики.

Молекула аммиака. Молекула аммиака NH_3 состоит из одного атома азота и трех атомов водорода (см. том II, стр. 314). Три атома водорода образуют равносторонний треугольник. Назовем плоскость этого треугольника плоскостью H_3. Атом N имеет два возможных положения, относительно которых он может колебаться, что соответствует двум маятникам, a и b. Первое положение (a) — с одной стороны от плоскости H_3 и второе положение (b) — с другой стороны от нее. Атом не может легко переходить из состояния a в состояние b и обратно, потому что между состояниями a и b имеется потенциальный барьер. В классической механике (т. е. механике, основанной только на законах Ньютона) a и b являются положениями устойчивого равновесия и атом азота, колеблющийся в состоянии a, *никогда* не сможет попасть в состояние b. (В случае двух маятников это соответствует отсутствию связывающей пружины. Тогда, если a колеблется, а b в покое, такое положение система будет сохранять неограниченно долго, если конечно, пренебречь трением.) Однако в квантовой механике связь между a и b проявляется в том, что разрешается проникновение атома азота из состояния a в b или обратно через потенциальный барьер. Предположим, что мы наблюдаем с момента $t=0$ за квантовомеханическим состоянием молекулы, у которой атом азота N определенно находится в состоянии a. Тогда начальные вероятности будут равны $|\psi_a|^2=1$, $|\psi_b|^2=0$ (т. е. вероятность того, что атом будет колебаться относительно положения a, равна единице и вероятность того, что молекула находится в положении b, равна нулю). Однако можно показать, что это условие не сохранится все время. Действительно, решение уравнения Шредингера для этих начальных условий дает следующие значения вероятности нахождения атома азота N в состоянии a и в состоянии b:

$$|\psi_a|^2 = {}^1/_2\,[1+\cos(\omega_1-\omega_2)\,t], \qquad (1а)$$

$$|\psi_b|^2 = {}^1/_2\,[1-\cos(\omega_1-\omega_2)\,t]. \qquad (1б)$$

Здесь ω_1 и ω_2 — частоты нормальных мод. Уравнения (1) удивительно похожи на уравнения (1.99) из п. 1.5. Полная вероятность того, что атом азота N будет находиться в одном из возможных состояний, равна, конечно, единице, что легко показать, сложив уравнения (1а) и (1б).

Как и в случае связанных маятников, молекула аммиака может «стартовать» из состояния с одной нормальной модой. Оказывается, что если состояние молекулы определяется модой с чуть большей частотой (назовем ее мода 2; $\omega_2>\omega_1$), то молекула нестабильна. Молекула будет стремиться испустить электромагнитное излучение и перейти из состояния, определяемого модой 2 (возбужденное состояние), в состояние, определяемое модой 1 (основное состояние). Это излучение может быть обнаружено. Частота излучения равна частоте биений $\nu_2-\nu_1$:

$$\nu_б=\nu_2-\nu_1 \approx 2\cdot 10^{10}\ гц,$$

что соответствует длине волны ($\lambda=c/\nu$) около 1,5 *см*, находящейся в типичном микроволновом диапазоне радара. Если послать микроволновый пучок с частотой $2\cdot 10^{10}$ *гц* через газообразный аммиак, то некоторые из микроволновых фотонов вызовут переход молекул из основного состояния (мода 1) в возбужденное состояние (мода 2). Таким образом происходит обмен энергией между микроволновым пучком и молекулами газа. Точно так же возбужденная молекула может «высветиться» в основное состояние, отдав один фотон микроволновому пучку. Такой обмен энергией между микроволновым пучком и аммиаком является основой действия «атомных часов». «Завод» таких часов происходит при поглощении газом энергии микроволнового пучка. «Поток вероятности» из положения a в b и обратно, определяемый частотой биений, обеспечивает механизм, регулирующий ход часов. Часы, использующие газ аммиак, а также их улучшенные «потомки» обеспечивают самое точное в мире измерение времени.

Нейтральные K-*мезоны*. Другой замечательной системой, поведение которой аналогично поведению системы связанных маятников, являются нейтральные K-мезоны. Их называют *странными частицами*. Они *действительно* очень странные, и их поведение еще не понято полностью. Эта система имеет две степени свободы, которые называются K^0-мезоном и $\bar{K}^0$-мезоном, аналогично двум маятникам. Эти степени свободы связаны, потому что K^0- и $\bar{K}^0$-мезоны могут взаимодействовать с двумя π-мезонами (наряду с другими возможными взаимодействиями) через «слабые взаимодействия». В этом примере π-мезон (или пион, для краткости) является аналогом связывающей пружины. Поэтому существуют две нормальные моды, которые называют K_1^0-мезон и K_2^0-мезон. В отличие от мод, которые мы до сих пор рассматривали, одна из этих мод (K_1^0-мода) имеет большее затухание, чем другая мода (K_2^0-мода). Системы с затуханием рассмотрены в главе 3. Если система начинает функционировать с момента $t=0$ с единичной вероятностью нахождения в K_1^0-моде, то эта вероятность экспоненциально уменьшается со временем по закону $\exp(-t/\tau_1)$. Аналогичное (но меньшее) затухание существует и у K_2^0-моды. «Потери вероятности», соответствующие затуханию, являются результатом радиоактивного распада мод на другие частицы. Например, K_1^0 распадается в большинстве случаев на два пиона и τ_1 соответствует среднему времени распада для K_1^0.

Если система начинает функционировать в момент $t=0$ с единичной вероятностью нахождения в состоянии K^0 (обозначим это состояние через a) и если нет затухания, то вероятность нахождения системы в этом же состоянии (K^0) в более позднее время будет определяться уравнением (1а). Соответствующая вероятность нахождения системы в состоянии b $(\overline{\mathrm{K}^0})$ будет определяться уравнением (1 б). Вследствие затухания эти формулы принимают вид

$$|\psi(\mathrm{K}^0)|^2=\frac{1}{4}\left[e^{-t/\tau_1}+e^{-t/\tau_2}+2e^{-(1/2)(t/\tau_1+t/\tau_2)}\cos(\omega_1-\omega_2)t\right], \quad (2а)$$

$$|\psi(\overline{\mathrm{K}^0})|^2=\frac{1}{4}\left[e^{-t/\tau_1}+e^{-t/\tau_2}-2e^{-(1/2)(t/\tau_1+t/\tau_2)}\cos(\omega_1-\omega_2)t\right]. \quad (2б)$$

Заметим, что, когда $\tau_1=\tau_2=\infty$ (затухание отсутствует), уравнения (2) превращаются в уравнения (1).

Интересно придумать механизм затухания, который демпфировал бы только моду 1, и второй механизм, который демпфировал бы только моду 2 для системы слабо связанных маятников. В этом случае уравнения для энергии системы маятников были бы похожи на уравнения (2), а не на уравнения (1).

Д.2. Дисперсионное соотношение для волн де Бройля

Волна де Бройля, описывающая отдельную частицу с определенной энергией, имеет вид

$$\psi(z,\ t)=Af(z)\,e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Вероятность, что частица находится в координатном интервале от z до $z+dz$, равна $|\psi(z,\ t)|^2\,dz$ и не зависит от t. Если потенциальная энергия частицы постоянна, мы имеем «однородную среду» и $f(z)$ в этом случае — синусоидальная функция kz:

$$\psi(z,\ t)=[A\sin kz+B\cos kz]\,e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Дисперсионное соотношение для частицы, находящейся в области постоянной потенциальной энергии V, получается подстановкой $E=\hbar\omega$ и $p=\hbar k$ (условие частот Бора и волновое число де Бройля) в классическое выражение для энергии. Например, для нерелятивистских электронов с массой m классическое соотношение между энергией E, импульсом p и потенциалом V имеет вид

$$E=\frac{p^2}{2m}+V. \quad (3)$$

Подставляя сюда $E=\hbar\omega$ и $p=\hbar k$, получаем дисперсионное соотношение для волн де Бройля:

$$\hbar\omega=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+V. \quad (4)$$

Электроны в «ящике». В качестве примера рассмотрим электрон, заключенный в одномерный «ящик», простирающийся от $z=0$ до $z=L$. Пусть внутри ящика потенциальная энергия постоянна, т. е. $V=V_1=\mathrm{const}$. Для z, меньших нуля и больших L, положим $V(z)$ равным $+\infty$. Если такой «связанный электрон» был бы классической частицей, он мог бы иметь любую кинетическую энергию:

$$\frac{p^2}{2m}=E-V_1. \quad (5)$$

Реальный электрон — не классическая частица. Его возможные состояния в «бесконечной потенциальной яме» являются нормальными модами волн де Бройля, т. е. представляют собой стоячие волны, у которых частота и длина волны связаны уравнением (4).

Формы стоячей волны аналогичны формам стоячих волн струны. Что представляет собой последовательность волновых чисел k для стоячих волн? Вероятность нахождения электрона вне интервала $0\leqslant z\leqslant L$ равна нулю. Таким образом, вне ямы $|\psi(z,\ t)|^2$ равно нулю. Но $\psi(z,\ t)$ — непрерывная функция координаты z. Поэтому функция ψ должна равняться нулю в $z=0$ и $z=L$. (Это — те же граничные условия однородной струны, закрепленной на концах. Поэтому стоячие волны