позднее время будет определяться уравнением (1a). Соответствующая вероятность нахождения системы в состоянии b ($\overline{\mathrm{K}^0}$) будет определяться уравнением (1 б). Вследствие затухания эти формулы принимают вид

$$|\psi(\mathrm{K}^0)|^2=\frac{1}{4}[e^{-t/\tau_1}+e^{-t/\tau_2}+2e^{-(1/2)(t/\tau_1+t/\tau_2)}\cos(\omega_1-\omega_2)t], \quad (2а)$$

$$|\psi(\overline{\mathrm{K}^0})|^2=\frac{1}{4}[e^{-t/\tau_1}+e^{-t/\tau_2}-2e^{-(1/2)(t/\tau_1+t/\tau_2)}\cos(\omega_1-\omega_2)t]. \quad (2б)$$

Заметим, что, когда $\tau_1=\tau_2=\infty$ (затухание отсутствует), уравнения (2) превращаются в уравнения (1).

Интересно придумать механизм затухания, который демпфировал бы только моду 1, и второй механизм, который демпфировал бы только моду 2 для системы слабо связанных маятников. В этом случае уравнения для энергии системы маятников были бы похожи на уравнения (2), а не на уравнения (1).

Д.2. Дисперсионное соотношение для волн де Бройля

Волна де Бройля, описывающая отдельную частицу с определенной энергией, имеет вид

$$\psi(z,\ t)=Af(z)\,e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Вероятность, что частица находится в координатном интервале от z до $z+dz$, равна $|\psi(z,\ t)|^2\,dz$ и не зависит от t. Если потенциальная энергия частицы постоянна, мы имеем «однородную среду» и $f(z)$ в этом случае — синусоидальная функция kz:

$$\psi(z,\ t)=[A\sin kz+B\cos kz]\,e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Дисперсионное соотношение для частицы, находящейся в области постоянной потенциальной энергии V, получается подстановкой $E=\hbar\omega$ и $p=\hbar k$ (условие частот Бора и волновое число де Бройля) в классическое выражение для энергии. Например, для нерелятивистских электронов с массой m классическое соотношение между энергией E, импульсом p и потенциалом V имеет вид

$$E=\frac{p^2}{2m}+V. \quad (3)$$

Подставляя сюда $E=\hbar\omega$ и $p=\hbar k$, получаем дисперсионное соотношение для волн де Бройля:

$$\hbar\omega=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+V. \quad (4)$$

Электроны в «ящике». В качестве примера рассмотрим электрон, заключенный в одномерный «ящик», простирающийся от $z=0$ до $z=L$. Пусть внутри ящика потенциальная энергия постоянна, т. е. $V=V_1=\mathrm{const}$. Для z, меньших нуля и больших L, положим $V(z)$ равным $+\infty$. Если такой «связанный электрон» был бы классической частицей, он мог бы иметь любую кинетическую энергию:

$$\frac{p^2}{2m}=E-V_1. \quad (5)$$

Реальный электрон — не классическая частица. Его возможные состояния в «бесконечной потенциальной яме» являются нормальными модами волн де Бройля, т. е. представляют собой стоячие волны, у которых частота и длина волны связаны уравнением (4).

Формы стоячей волны аналогичны формам стоячих волн струны. Что представляет собой последовательность волновых чисел k для стоячих волн? Вероятность нахождения электрона вне интервала $0\leqslant z\leqslant L$ равна нулю. Таким образом, вне ямы $|\psi(z,\ t)|^2$ равно нулю. Но $\psi(z,\ t)$ — непрерывная функция координаты z. Поэтому функция ψ должна равняться нулю в $z=0$ и $z=L$. (Это — те же граничные условия однородной струны, закрепленной на концах. Поэтому стоячие волны де Бройля имеют точно такую же последовательность конфигураций, что и идеальная струна.) Из граничного условия для $z=0$ следует, что в уравнении (2) $B=0$:

$$\psi(z,\ t)=e^{-i\omega t}A\sin kz. \tag{6}$$

Из граничного условия для $z=L$ следует, что $\sin kL=0$. Таким образом, возможные стоячие волны соответствуют $L=$ половине длины волны, двум половинам длины волны и т. д.:

$$k_1L=\pi,\qquad k_2L=2\pi,\ \ldots,\ k_nL=n\pi,\ \ldots \tag{7}$$

Если состояние электрона соответствует какой-то отдельной моде, то приходящаяся на единицу длины вероятность нахождения электрона в положении z во время t равна

$$|\psi(z,\ t)|^2=|e^{-i\omega t}A\sin kz|^2=|A|^2\sin^2 kz. \tag{8}$$

Эта вероятность не зависит от времени, и поэтому говорят, что электрон находится в «стационарном состоянии». Вероятность того, что электрон находится где-то между $z=0$ и $z=L$, равна единице. Отсюда получаем условие нормировки для $|A|^2$:

$$1=\int_0^L|\psi|^2\,dz=|A|^2\int_0^L\sin^2 kz\,dz=\frac{1}{2}|A|^2L, \tag{9}$$

которое определяет $|A|$. Таким образом,

$$A=|A|e^{i\alpha}=\sqrt{\frac{2}{L}}e^{i\alpha};$$

тогда

$$\psi(z,\ t)=\sqrt{\frac{2}{L}}e^{-i(\omega t-\alpha)}\sin kz, \tag{10}$$

где α — неопределенная фазовая постоянная.

Частоты стоячих волн определяются из дисперсионного соотношения [уравнение (4)]

$$\omega_n=\omega_0+\frac{\hbar k_n^2}{2m},\qquad \omega_0=\frac{V_1}{\hbar}. \tag{11}$$

Таким образом, энергия электрона E равна

$$E_n=V_1+\frac{\hbar^2k_n^2}{2m}=V_1+\frac{\hbar^2(n\pi/L)^2}{2m}\quad \text{для } n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{12}$$

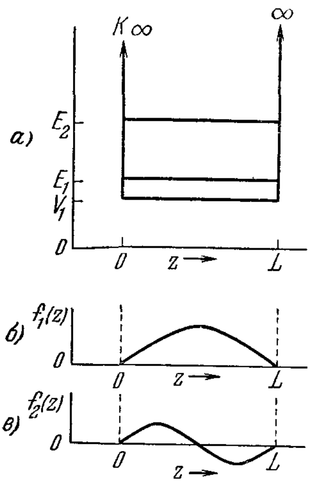

Рис. Д.1. Электрон в бесконечно высокой потенциальной яме.

а) График $V(z)$. Горизонтальными линиями E_1 и E_2 показаны уровни энергии первой и второй моды (основное и первое возбужденное состояния). Кинетическая энергия E_n-V_1 пропорциональна n^2, поэтому на графике E_2-V_1 в четыре раза больше, чем E_1-V_1. *б)* Волновая функция основного состояния $f_1(z)$. *в)* Волновая функция первого возбужденного состояния.

Частоты стоячих волн отличаются от частот струны. Хотя геометрические формы стоячих волн де Бройля подобны тем, которые возникают у закрепленной струны, частоты не являются гармониками частоты самой низкой моды. Это происходит потому, что дисперсионное соотношение для волн де Бройля сильно отличается от дисперсионного соотношения для стоячих волн струны. На рис. Д.1 показана самая низкая мода (так называемое «основное состояние») и вторая мода («первое возбужденное состояние»).

Неоднородная среда. Если потенциальная энергия $V(z)$ не постоянна, а зависит от z, то формы стоячих волн де Бройля, соответствующие определенным модам (состояние с определенной частотой волны, т. е. с определенной энергией частицы), не синусоидальны в пространстве. В этом случае не существует дисперсионного соотношения, связывающего ω и k, потому что пространственная зависимость не выражается уже уравнением (2), и не существует определенного волнового числа k, соответствующего частоте ω. Теперь для получения волновой функции $f(z)$ нужно решить дифференциальное волновое уравнение Шредингера. Эта ситуация напоминает случай непрерывной струны, рассмотренной в п. 2.3. Там было показано, что моды струны имеют синусоидальную пространственную зависимость только в том случае, если среда (т. е. струна) однородна. Для неоднородной струны пространственная зависимость стоячих волн получается из решения дифференциального уравнения [уравнение (2.59) п. 2.3, мы полагаем натяжение $T_0(z)=T_0=\text{const}$ и плотность $\rho_0(z)$ не постоянной]

$$\frac{d^2f(z)}{dz^2}=-\frac{\omega^2\rho_0(z)}{T_0}f(z). \tag{13}$$

Аналогично для неоднородного потенциала $V(z)$ пространственная зависимость стоячих волн де Бройля получается из решения уравнения Шредингера, которое в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2f(z)}{dz^2}=\frac{2m}{\hbar^2}[V(z)-\hbar\omega]f(z). \tag{14}$$

Д.3. Проникновение частицы в область пространства, «запрещенную» классической механикой

Сумма потенциальной и кинетической энергии классической (нерелятивистской) частицы равна

$$E=\frac{p^2}{2m}+V, \tag{1}$$

где $p^2/2m$ — кинетическая энергия, а V — потенциальная энергия. Положим, что при $0\leqslant z\leqslant L$ потенциальная энергия $V=V_1$, а от $z=L$ до $+\infty$ и от $z=0$ до $-\infty$ $V=V_2$ ($V_2>V_1$). Предположим, что классическая частица находится в такой потенциальной яме. Это возможно в том случае, если полная энергия частицы лежит между V_1 и V_2. Тогда, если классическая частица находится в области между $z=0$ и $z=L$, она никогда «не выберется» из этой ямы. Она «носится» туда и обратно между стенками, имея импульс $p_z=\pm\sqrt{2m(E-V_1)}$ и меняя его знак после соударения со стенкой. Частица не может проникнуть в область, где потенциальная энергия равна V_2, потому что тогда кинетическая энергия станет отрицательной:

$$\frac{p^2}{2m}=E-V=E-V_2=-(V_2-E) \quad \text{для} \quad E<V_2. \tag{2}$$

Отрицательное значение кинетической энергии для классической частицы не имеет смысла.

Однако реальные частицы не являются классическими. Реальным частицам наряду со свойствами «твердых» частиц присущи свойства волн. Соотношения де Бройля $p=\hbar k$ и Бора $E=\hbar\omega$ определяют дисперсионное соотношение

$$\omega=\omega_0(z)+\frac{\hbar k^2}{2m} \quad \text{для} \quad \omega>\omega_0, \tag{3}$$

где

$$\omega_0(z)\equiv\frac{V(z)}{\hbar}.$$

Аналогия со связанными маятниками. Соотношение (3) можно сравнить с дисперсионным соотношением для связанных маятников (в случае непрерывного приближения, см. п. 3.5)

$$\omega^2=\omega_0^2(z)+\frac{K^2a^2}{M}k^2 \quad \text{для} \quad \omega^2>\omega_0^2, \tag{4}$$