Д.4. Фазовая и групповая скорости волн де Бройля

Для нерелятивистского электрона с энергией E и с постоянной потенциальной энергией V дисперсионное соотношение (см. п.Д.2) имеет вид

$$\omega=\frac{\hbar k^2}{2m}+\frac{V}{\hbar}. \tag{1}$$

Фазовая скорость равна

$$v_{\text{ф}}(k)=\frac{\omega}{k}=\frac{\hbar k}{2m}+\frac{V}{\hbar k}. \tag{2}$$

Скорость классической частицы равна p/m, т. е. $\hbar k/m$. Таким образом, уравнение (2) может быть записано как

$$v_{\text{ф}}(k)=\frac{1}{2}v\ (\text{частицы})+\frac{V}{p\ (\text{частицы})}, \tag{3}$$

что является специфическим выражением. К счастью, $v_{\text{ф}}(k)$ нельзя наблюдать непосредственно. Скорость квантовомеханической частицы определяется скоростью волнового пакета, составленного из нескольких близких значений k, а не из одного значения k. Скорость же распространения волнового пакета определяется групповой скоростью $v_{\text{гр}}$. Используя уравнение (1), имеем

$$v_{\text{гр}}=\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0=\left(\frac{\hbar k}{m}\right)_0, \tag{4}$$

где индекс нуль означает, что производная должна вычисляться для k, лежащего в центре полосы Δk, формирующей пакет. Таким образом, мы видим, что $v_{\text{гр}}=v$ (частицы), если взять импульс частицы $(\hbar k)_0$, соответствующий центру пакета.

Для свободных релятивистских частиц энергия, импульс и масса покоя связаны следующим образом:

$$E^2=(mc^2)^2+(cp)^2, \tag{5}$$

что дает следующее дисперсионное соотношение (напоминаем, что $E=\hbar\omega$ и $p=\hbar k$):

$$\hbar^2\omega^2=(mc^2)^2+(\hbar ck)^2. \tag{6}$$

Фазовая скорость $v_{\text{ф}}=\omega/k$ имеет значение $v_{\text{ф}}=\omega/k=E/p$, которое равно c^2/v (частицы), т. е. больше, чем c. Групповая скорость равна

$$v_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{dk}=\frac{c^2k}{\omega}=\frac{c^2p}{E}=v\ (\text{частицы}). \tag{7}$$

Соотношение между фазовой скоростью, групповой скоростью и скоростью света такое же, как и для радиоволн в ионосфере, а именно $v_{\text{ф}}v_{\text{гр}}=c^2$. Это происходит из-за подобия дисперсионных соотношений.

Д.5. Волновое уравнение для волн де Бройля

Гармоническая волна де Бройля (т. е. стационарное состояние) в области постоянного потенциала имеет вид

$$\psi(z,\ t)=e^{-i\omega t}(Ae^{ikz}+Be^{-ikz}). \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{\partial\psi(z,\ t)}{\partial t}=-i\omega\psi(z,\ t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial t^2}=-\omega^2\psi(z,\ t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial\psi(z,\ t)}{\partial z}=e^{-i\omega t}(ikAe^{ikz}-ikBe^{-ikz}), \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial z^2}=-k^2\psi(z,\ t). \tag{5}$$