Для нерелятивистских частиц дисперсионное соотношение (см. п.Д.2) имеет вид

$$\hbar\omega=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+V. \tag{6}$$

Умножая уравнение (2) на $i\hbar$ и используя уравнения (5) и (6), получаем

$$\frac{i\hbar\,\partial\psi(z,\ t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial z^2}+V\psi(z,\ t). \tag{7}$$

Уравнение (7) было выведено с помощью гармонических волн, являющихся его решением для постоянного потенциала. Однако нет причин для того, чтобы это уравнение было несправедливо и в случае, когда $V=V(z)$, т. е. если потенциал зависит от положения. Именно Шредингер предположил, что уравнение (7) остается справедливым в случае, когда $V(z)$ не постоянно. Уравнение (7) с $V=V(z)$ называется *уравнением Шредингера* (более точно, одномерным уравнением Шредингера). Оно широко применяется в атомной физике.

Когда нельзя пренебречь релятивистскими эффектами, уравнения (6) и (7) неприменимы. Для свободных релятивистских частиц дисперсионное соотношение имеет вид

$$\hbar^2\omega^2=\hbar^2c^2k^2+(mc^2)^2. \tag{8}$$

Умножая уравнение (8) на $-\hbar^2\psi(z,\ t)$ и используя уравнения (3) и (5), мы получаем

$$\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\psi(z,\ t)}{\partial z^2}-\frac{(mc^2)}{\hbar^2}\psi(z,\ t). \tag{9}$$

Уравнение (9) называется *уравнением Клейна — Гордона*. Обратите внимание, что если мы положим $m=0$, то получим классическое волновое уравнение для недиспергирующих волн, распространяющихся со скоростью c. Это соответствует тому, что фотон имеет нулевую массу покоя.

Д.6. Электромагнитное излучение одномерного «атома»

Прежде всего снова прочтите пункт Д.2. Рассмотрим установившиеся состояния для электрона в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, координаты которых $z=-L/2$ и $z=+L/2$. Предположим далее, что состояние электрона определяется суперпозицией основного состояния и первого возбужденного состояния:

$$\psi(z,\ t)=\psi_1(z,\ t)+\psi_2(z,\ t), \tag{1}$$

$$\psi_1(z,\ t)=A_1e^{-i\omega_1 t}\cos k_1z,\qquad k_1L=\pi, \tag{2}$$

$$\psi_2(z,\ t)=A_2e^{-i\omega_2 t}\sin k_2z,\quad kL=2\pi. \tag{3}$$

Вероятность (на единицу длины) нахождения электрона в положении z в момент времени t равна

$$|\psi(z,\ t)|^2=|A_1e^{-i\omega_1t}\cos k_1z+A_2e^{-i\omega_2t}\sin k_2z|^2=$$
$$=A_1^2\cos^2k_1z+A_2^2\sin^2k_2z+2A_1A_2\cos k_1z\sin k_2z\cos(\omega_2-\omega_1)t. \tag{4}$$

Мы видим, что выражение для вероятности имеет член, который совершает гармонические колебания с частотой биений между двумя боровскими частотами ω_1 и ω_2. Взяв написанные ниже интегралы, легко получить выражение для $\bar z$ — среднего в пространстве значения z:

$$\int\limits_{-L/2}^{+L/2}|\psi|^2dz=(A_1^2+A_2^2)\frac{L}{2},\qquad \int\limits_{-L/2}^{L/2}z|\psi|^2dz=\frac{16L^2}{9\pi^2}A_1A_2\cos(\omega_2-\omega_1)t,$$

$$\bar z=\frac{\int z|\psi|^2dz}{\int|\psi|^2dz}=\frac{32L}{9\pi^2}\frac{A_1A_2}{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega_2-\omega_1)t,$$

т. е.

$$z=(0{,}36L)\frac{A_1A_2}{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega_2-\omega_1)t. \qquad (5)$$

Почему частота излучения является частотой биений. Электрон заряжен ($q=-e$), поэтому он будет испускать электромагнитное излучение той же частоты, с которой он колеблется. Из уравнения (5) мы видим, что среднее положение заряда колеблется с частотой биений $\omega_2-\omega_1$. Поэтому частота излучения равна частоте биений между двумя стационарными состояниями:

$$\omega_{\text{изл}}=\omega_2-\omega_1. \qquad (6)$$

Д.7. Время когерентности и оптические биения

Можно получить интерференцию между волнами различных частот. Это справедливо как для оптических, так и для других явлений. Предположим, что имеем две световые волны 1 и 2, образующие электрические поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Пусть оба поля поляризованы по $\hat{\mathbf{x}}$ (поэтому можно опустить обозначение вектора.) Полное поле в фиксированной точке пространства z будет суперпозицией E_1 и E_2. Используя комплексное представление колебаний, напишем следующее выражение для суперпозиции:

$$E_c(t)=E_1e^{i\omega_1t}e^{i\varphi_1}+E_2e^{i\omega_2t}e^{i\varphi_2}. \qquad (1)$$

Поток энергии, который можно измерить фотоумножителем (выходной ток фотоумножителя пропорционален падающему потоку энергии), пропорционален среднему значению величины $E^2(t)$ за период T «быстрых» колебаний, происходящих со средней частотой:

$$\langle E^2(T)\rangle=\frac{1}{2}|E_c(t)|^2=\frac{1}{2}\{E_1^2+E_2^2+2E_1E_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\}. \qquad (2)$$

Ток фотоумножителя, который меняется с относительно медленной частотой биений $\omega_1-\omega_2$, можно измерить. Какие требования накладываются на частотный диапазон? Напомним, что наша точка зрения состоит в том, что амплитуды и фазовые постоянные медленно изменяются непредсказуемым образом. Фаза φ_1, например, дрейфует совершенно произвольно в диапазоне порядка 2π в течение интервала времени, равного времени когерентности. Это время в свою очередь является величиной, обратной частотному диапазону колебаний 1:

$$t_{1\,(\text{ког})}\approx(\Delta\nu_1)^{-1}, \qquad (3)$$

$$t_{2\,(\text{ког})}\approx(\Delta\nu_2)^{-1}. \qquad (4)$$

Ясно, что если мы наблюдаем биения, то отдельные компоненты должны сохранять свои фазы грубо постоянными в течение периода биений. Поэтому для наблюдения биений необходимо, чтобы оба времени когерентности были больше периода биений, т. е. чтобы полосы частот обоих колебаний были меньше частоты биений:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\nu_1&<|\nu_1-\nu_2|,\\ \Delta\nu_2&<|\nu_1-\nu_2|\end{aligned}\right\}\text{ для наблюдаемых биений.} \qquad (5)$$

Мы должны, разумеется, уметь регистрировать ток фотоумножителя, меняющийся с частотой биений. Такой опыт требует большого искусства. Он был выполнен весьма изящным образом *).

Д.8. Почему небо голубое?

В п. 7.5 мы говорили, что голубой цвет неба определяется рассеянием света отдельными молекулами воздуха. Здесь мы приведем рассуждения, из которых как будто бы следует, что небо должно быть невидимым.

*) См. A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, P. O. Johnson, Photoelectric Mixing of Incoherent Light (Фотоэлектрическое смешение некогерентного света), Phys. Rev. **99**, 169 (1955).