

г. е.

$$z = (0,36L) \frac{A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega_2 - \omega_1) t. \quad (5)$$

Почему частота излучения является частотой биений. Электрон заряжен ($q = -e$), поэтому он будет испускать электромагнитное излучение той же частоты, с которой он колеблется. Из уравнения (5) мы видим, что среднее положение заряда колеблется с частотой биений $\omega_2 - \omega_1$. Поэтому частота излучения равна частоте биений между двумя стационарными состояниями:

$$\omega_{\text{изл}} = \omega_2 - \omega_1. \quad (6)$$

Д.7. Время когерентности и оптические биения

Можно получить интерференцию между волнами различных частот. Это справедливо как для оптических, так и для других явлений. Предположим, что имеем две световые волны 1 и 2, образующие электрические поля E_1 и E_2 . Пусть оба поля поляризованы по \hat{x} (потому можно опустить обозначение вектора.) Полное поле в фиксированной точке пространства z будет суперпозицией E_1 и E_2 . Используя комплексное представление колебаний, напишем следующее выражение для суперпозиции:

$$E_c(t) = E_1 e^{i\omega_1 t} e^{i\varphi_1} + E_2 e^{i\omega_2 t} e^{i\varphi_2}. \quad (1)$$

Поток энергии, который можно измерить фотоумножителем (выходной ток фотоумножителя пропорционален падающему потоку энергии), пропорционален среднему значению величины $E^2(t)$ за период T «быстрых» колебаний, происходящих со средней частотой:

$$\langle E^2(T) \rangle = \frac{1}{2} |E_c(t)|^2 = \frac{1}{2} \{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]\}. \quad (2)$$

Ток фотоумножителя, который меняется с относительно медленной частотой биений $\omega_1 - \omega_2$, можно измерить. Какие требования накладываются на частотный диапазон? Напомним, что наша точка зрения состоит в том, что амплитуды и фазовые постоянные медленно изменяются непредсказуемым образом. Фаза φ_1 , например, дрейфует совершенно произвольно в диапазоне порядка 2π в течение интервала времени, равного времени когерентности. Это время в свою очередь является величиной, обратной частотному диапазону колебаний 1:

$$t_1(\text{ког}) \approx (\Delta\nu_1)^{-1}, \quad (3)$$

$$t_2(\text{ког}) \approx (\Delta\nu_2)^{-1}. \quad (4)$$

Ясно, что если мы наблюдаем биения, то отдельные компоненты должны сохранять свои фазы грубо постоянными в течение периода биений. Поэтому для наблюдения биений необходимо, чтобы оба времени когерентности были больше периода биений, т. е. чтобы полосы частот обоих колебаний были меньше частоты биений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\nu_1 < |\nu_1 - \nu_2|, \\ \Delta\nu_2 < |\nu_1 - \nu_2| \end{aligned} \right\} \text{ для наблюдаемых биений.} \quad (5)$$

Мы должны, разумеется, уметь регистрировать ток фотоумножителя, меняющийся с частотой биений. Такой опыт требует большого искусства. Он был выполнен весьма изящным образом *).

Д.8. Почему небо голубое?

В п. 7.5 мы говорили, что голубой цвет неба определяется рассеянием света отдельными молекулами воздуха. Здесь мы приведем рассуждения, из которых как будто бы следует, что небо должно быть невидимым.

* См. А. Т. Forrester, R. A. Gudmundsen, P. O. Johnson, Photoelectric Mixing of Incoherent Light (Фотоэлектрическое смешение некогерентного света), Phys. Rev. **99**, 169 (1955).

Рассмотрим одну монохроматическую компоненту солнечного света. Электрическое поле (этой компоненты) действует на молекулу воздуха, и каждый колеблющийся электрон молекулы испускает волны во всех направлениях. Глаз наблюдателя регистрирует часть этих волн. Но для данной молекулы (назовем ее №1) можно найти другую молекулу (№2), которая отстоит от наблюдателя дальше на $\frac{1}{2}\lambda$. Если обе молекулы возбуждаются с одинаковой амплитудой и фазовой постоянной, то суперпозиция посланных ими волн у наблюдателя будет давать ноль. Для рассеяния под углом 90° мы, очевидно, можем удовлетворить этим условиям для фаз и амплитуд, если концентрация молекул воздуха достаточно велика, так что практически всегда для каждой молекулы №1 можно найти молекулу № 2. (При рассеянии под углом, близким к нулю, молекулы, находящиеся на расстоянии от наблюдателя, большем на $\frac{1}{2}\lambda$, возбуждаются на полпериода раньше. Поэтому они не создают деструктивной интерференции.) При нормальных условиях концентрация молекул близка к $3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Поэтому куб с ребром $5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ (длина волны голубого света) содержит около $4 \cdot 10^6$ молекул, т. е. около 100 молекул вдоль каждого ребра куба размером в одну длину волны. Такое число молекул кажется более чем достаточным для создания полностью деструктивной интерференции, даже если учесть экспоненциальное уменьшение плотности воздуха с высотой. Таким образом, мы пришли к заключению, что часть неба, соответствующая рассеянию солнечного света под углом 90° , должна быть «черной», а не ярко голубой!

Очевидно, что этот вывод полностью противоречит действительности. Наблюдаемая интенсивность очень близка к рассчитываемой по сумме интенсивностей рассеяния на отдельных независимых молекулах воздуха. По некоторым причинам предсказываемая деструктивная интерференция не возникает. Почему?

Приведем еще один факт, связанный с этой проблемой. Если вместо воздуха взять стекло или чистую воду, то ожидаемая для рассеяния на 90° деструктивная интерференция, конечно, происходит. Именно поэтому пучок прожектора проходит через чистую воду с ничтожными потерями интенсивности (за исключением рассеяния пучка вследствие дифракции). Заметим, что количество воздуха над поверхностью Земли эквивалентно по весу (и приблизительно по числу молекул) слою воды в 10 м. Несмотря на это, рассеяние на 90° , испытываемое пучком прожектора на длине 10 м чистой воды, очень мало по сравнению с рассеянием солнечного света в атмосфере. В случае воды при рассеянии на 90° амплитуды складываются так, что ожидаемая деструктивная интерференция действительно происходит. В воздухе такой интерференции нет. Почему?

Различие заключается в *равномерности* пространственного распределения молекул воды по сравнению с молекулами воздуха. Молекулы воды «соприкасаются» и, следовательно, распределены в пространстве очень равномерно. В этом случае всегда найдется молекула № 2, уничтожающая вклад молекулы № 1 (в суперпозиции полей в точке наблюдения). Для воздуха это условие выполняется только в *среднем*. Иногда такая молекула есть, а иногда ее нет. *Флуктуации концентрации молекул нарушают когерентность*, поэтому ожидаемая деструктивная интерференция *амплитуд* при рассеянии на 90° не возникает. Вместо этого (как всегда для некогерентных источников) *полная интенсивность* равна сумме интенсивностей от всех источников (молекул).

Дадим упрощенное доказательство этих рассуждений. Рассмотрим небольшую область пространства. Назовем ее областью 1. Теперь возьмем другую область (область 2) того же размера, расположенную на таком же расстоянии от Солнца, но на *подлинны* волны дальше от наблюдателя, чем область 1. (Мы рассматриваем монохроматическую компоненту солнечного света.) Предположим далее, что эти области малы по сравнению с длиной волны. Тогда все молекулы в области 1 возбуждаются в фазе. Каждая молекула создает в точке наблюдения поле E_1 . Если в данное время в области 1 находится n_1 молекул, то поле от них в точке наблюдения равно $n_1 E_1$. Аналогично поле, образованное в точке наблюдения молекулами области 2, равно $n_2 E_2$, а полное поле равно $E = n_1 E_1 + n_2 E_2$. Области находятся в фазе, а расстояния от них до точки наблюдения отличаются на подлинны волны. Поэтому $E_2 = -E_1$. Таким образом, в данный момент времени имеем

$$E = n_1 E_1 + n_2 E_2 = (n_1 - n_2) E_1. \quad (1)$$

Поле E_1 — это поле, созданное одной возбужденной молекулой воздуха. Для этого поля мы можем написать (опуская обозначение вектора, поскольку мы не интересуемся поляризацией)

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Поэтому вклад от двух областей 1 и 2 равен

$$E = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

где

$$A = (n_1 - n_2) A_1. \quad (4)$$

Чему равно среднее, или «ожидаемое», значение амплитуды A ? Иногда n_1 больше, чем n_2 , иногда меньше. В среднем n_1 и n_2 равны, поэтому в среднем A равно нулю. Если n_1 и n_2 постоянно имеют свои средние значения, то E всегда равно нулю и рассеяния под углом 90° не будет. Мы увидим, что это не так.

Обратимся к интенсивности рассеянного излучения. Она пропорциональна квадрату электрического поля. Возьмем среднее за один период колебаний. (Период равен примерно 10^{-15} сек; n_1 и n_2 не меняются в течение такого короткого интервала.) Тогда рассеянная интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды A . Без учета неинтересующих нас констант имеем

$$\text{Интенсивность} = A^2 = (n_1 - n_2)^2 A_1^2. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим действие флуктуации величины $n_1 - n_2$. Если мы образуем среднее за достаточно большой интервал времени (чтобы области 1 и 2 имели время «почувствовать» постоянно изменяющуюся плотность), то средняя по времени интенсивность от двух областей будет равна среднему от $(n_1 - n_2)^2$, умноженному на интенсивность от одной молекулы из области 1 или 2. Обозначив среднюю во времени интенсивность от двух областей через I , получим

$$I = (\overline{n_1 - n_2})^2 I_1, \quad (6)$$

где I_1 — интенсивность от одной молекулы из области 1, а черта означает усреднение по времени. Среднее значение $\overline{n_1}$ равно среднему значению $\overline{n_2}$. Поэтому можем записать

$$(n_1 - n_2)^2 = [(n_1 - \overline{n_1}) - (n_2 - \overline{n_2})]^2 = \\ = (n_1 - \overline{n_1})^2 + (n_2 - \overline{n_2})^2 - 2(n_1 - \overline{n_1})(n_2 - \overline{n_2}). \quad (7)$$

Взяв среднее, найдем, что

$$\overline{(n_1 - n_2)^2} = \overline{(n_1 - \overline{n_1})^2} + \overline{(n_2 - \overline{n_2})^2} - 2\overline{(n_1 - \overline{n_1})(n_2 - \overline{n_2})}. \quad (8)$$

Все, что мы писали до сих пор, применимо как к воздуху, так и к воде. Теперь мы подошли к главному различию между ними. Для воздуха области 1 и 2 полностью независимы в том смысле, что флуктуации n_1 (в данный момент) не зависят от флуктуаций n_2 . Это объясняется тем, что молекулы области 1 никак не влияют на молекулы области 2. (Для воды ситуация иная: молекулы «соприкасаются». Чтобы «втолкнуть» молекулу в область 1, нужно освободить для нее пространство, «вытолкнув» из него другую молекулу. При этом из-за связи между молекулами вы будете влиять на число молекул в области 2). Поэтому для воздуха среднее от произведения $(n_1 - \overline{n_1})$ на $(n_2 - \overline{n_2})$ равно произведению двух независимых средних значений:

$$\overline{(n_1 - \overline{n_1})(n_2 - \overline{n_2})} = \overline{(n_1 - \overline{n_1})} \overline{(n_2 - \overline{n_2})} = (\overline{n_1} - \overline{n_1})(\overline{n_2} - \overline{n_2}) = 0. \quad (9)$$

(Это обстоятельство является главным пунктом наших рассуждений.) Теперь оценим средние квадратичные флуктуации n_1 и n_2 . В случае воздуха в области 1 (или области 2) имеется «сколько угодно» свободного пространства, т. е. эти области не переполнены молекулами. Появление избыточного числа молекул в области 1 в данный момент времени никак не влияет на ту область, откуда пришли избыточные молекулы. В этом случае оказывается (это будет показано в V томе), что вероятность обнаружить данное число молекул в области 1 (или области 2) определяется функцией, называемой *распределением Пуассона*. Для этой функции средний квадрат отклонения n_1 от своего среднего значения равен самому среднему

значению:

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} = \bar{n}_1, \quad \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} = \bar{n}_2. \quad (10)$$

Написанное выражение справедливо для молекул воздуха, но не для молекул воды. В последнем случае существование небольшого избытка молекул сильно препятствует проникновению (в область) дополнительного числа молекул. Это свойство воды выражается следующими неравенствами:

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} \ll \bar{n}_1, \quad \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} \ll \bar{n}_2. \quad (11)$$

Для воздуха средняя во времени интенсивность поля, созданного обеими областями, равна

$$I = \overline{(n_1 - n_2)^2} I_1 = \overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} I_1 + \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} I_1 + 0 = \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_1 = \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_2. \quad (12)$$

Итак, интенсивность равна сумме вкладов от молекул области 1 и от молекул области 2. Для воды имеем

$$I = \overline{(n_1 - n_2)^2} I_1 \ll \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_2. \quad (13)$$

Если бы n_1 и n_2 были всегда равны, то мы имели бы «совершенно жесткую и однородную воду», которая создала бы нулевую интенсивность.

Роберт Вуд показал с помощью очень простого и искусного опыта, что интенсивность света, рассеянного воздухом под углом 90° , пропорциональна числу молекул, дающих вклад в общую интенсивность [уравнение (12)]. Его опыт легко повторить*).

Д.9. Электромагнитные волны в материальной среде

Рассуждения, приводимые здесь, имеют более общий характер, чем в основном тексте книги. Мы не будем избегать рассмотрения неупругой части диэлектрической постоянной и будем работать с комплексными числами.

Уравнения Максвелла. Напишем уравнения Максвелла в наиболее общем виде (в системе СГСЭ):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_{\text{полн}} = 4\pi \rho_{\text{своб}} - 4\pi \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{полн}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{своб}} + \left(4\pi \nabla \times \mathbf{M} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4)$$

[Эти уравнения вы найдете во II томе Берклеевского курса физики «Электричество и магнетизм»: уравнение (1)—стр. 356, уравнение (1); уравнение (2)—стр. 332, уравнение (57); уравнение (3)—стр. 343, уравнение (19) (которое справедливо, когда \mathbf{M} равно нулю) и стр. 385, уравнение (50) (которое справедливо, когда $\partial \mathbf{P} / \partial t$ и $\partial \mathbf{E} / \partial t$ равны нулю); уравнение (4) — стр. 246, уравнение (30).]

Уравнения (1)—(4) можно записать и так:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \{ \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \} = 4\pi \rho_{\text{своб}}, \quad (6)$$

$$\nabla \times \{ \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{своб}}, \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (8)$$

Сумма $\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ обозначается \mathbf{D} . Разность $\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$ обозначается \mathbf{H} :

$$\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \equiv \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \equiv \mathbf{H}. \quad (9)$$

Мы, однако, не будем использовать величины \mathbf{D} и \mathbf{H} .

*) Этот опыт описан в книге М. Миннарта «Свет и цвет в природе», Физматгиз, 1958, §§ 188—193.