значению:

$$\overline{(n_1-\bar n_1)^2}=\bar n_1, \quad \overline{(n_2-\bar n_2)^2}=\bar n_2. \qquad (10)$$

Написанное выражение справедливо для молекул воздуха, но не для молекул воды. В последнем случае существование небольшого избытка молекул сильно препятствует проникновению (в область) дополнительного числа молекул. Это свойство воды выражается следующими неравенствами:

$$\overline{(n_1-\bar n_1)^2}\ll \bar n_1, \quad \overline{(n_2-\bar n_2)^2}\ll \bar n_2. \qquad (11)$$

Для воздуха средняя во времени интенсивность поля, созданного обеими областями, равна

$$I=\overline{(n_1-n_2)^2}\,I_1=\overline{(n_1-\bar n_1)^2}\,I_1+\overline{(n_2-\bar n_2)^2}\,I_1+0=\bar n_1 I_1+\bar n_2 I_1=\bar n_1 I_1+\bar n_2 I_2. \qquad (12)$$

Итак, интенсивность равна *сумме вкладов* от молекул области 1 и от молекул области 2. Для воды имеем

$$I=\overline{(n_1-n_2)^2}\,I_1\ll \bar n_1 I_1+\bar n_2 I_2. \qquad (13)$$

Если бы n_1 и n_2 были всегда равны, то мы имели бы «совершенно жесткую и однородную воду», которая создала бы нулевую интенсивность.

Роберт Вуд показал с помощью очень простого и искусного опыта, что интенсивность света, рассеянного воздухом под углом 90°, пропорциональна числу молекул, дающих вклад в общую интенсивность [уравнение (12)]. Его опыт легко повторить *).

Д.9. Электромагнитные волны в материальной среде

Рассуждения, приводимые здесь, имеют более общий характер, чем в основном тексте книги. Мы не будем избегать рассмотрения неупругой части диэлектрической постоянной и будем работать с комплексными числами.

Уравнения Максвелла. Напишем уравнения Максвелла в наиболее общем виде (в системе СГСЭ):

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho_{\text{полн}}=4\pi\rho_{\text{своб}}-4\pi\nabla\cdot\mathbf{P}, \qquad (2)$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{полн}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{своб}}+\left(4\pi\nabla\times\mathbf{M}+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad (3)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (4)$$

[Эти уравнения вы найдете во II томе Берклеевского курса физики «Электричество и магнетизм»: уравнение (1)—стр. 356, уравнение (1); уравнение (2)—стр. 332, уравнение (57); уравнение (3)—стр. 343, уравнение (19) (которое справедливо, когда **M** равно нулю) и стр. 385, уравнение (50) (которое справедливо, когда $\partial\mathbf{P}/\partial t$ и $\partial\mathbf{E}/\partial t$ равны нулю); уравнение (4) — стр. 246, уравнение (30).]

Уравнения (1)—(4) можно записать и так:

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \qquad (5)$$

$$\nabla\cdot\{\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}\}=4\pi\rho_{\text{своб}}, \qquad (6)$$

$$\nabla\times\{\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}\}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}\}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{своб}}, \qquad (7)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (8)$$

Сумма $\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ обозначается **D**. Разность $\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$ обозначается **H**:

$$\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}\equiv\mathbf{D}, \quad \mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}\equiv\mathbf{H}. \qquad (9)$$

Мы, однако, не будем использовать величины **D** и **H**.

---

*) Этот опыт описан в книге М. Миннарта «Свет и цвет в природе», Физматгиз, 1958, §§ 188—193.

Линейная изотропная среда. Сила, действующая на точечный заряд q с координатами x, y, z в момент времени t, равна

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\,(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}, \tag{10}$$

где **E** и **B** — мгновенные локальные поля. В случае «непрерывной» среды для определения средних в пространстве значений **E** и **B** мы пользуемся понятием средней силы, приходящейся на единицу заряда. Мы считаем, что эти поля действуют на заряд и скорость, усредненные по элементу объема. Таким образом, вводится понятие о плотности заряда и тока.

Силы, действующие на заряды и токи в среде, вызваны полями **E** и **B**. Эти силы меняют распределение токов и зарядов и влияют на **P** и **M**. Говорят, что среда *изотропна*, если вектор поляризации **P** коллинеарен вектору $\pm\mathbf{E}$, а вектор намагниченности **M** коллинеарен $\pm\mathbf{B}$. Понятие изотропной среды включает в себя частный случай $\mathbf{P}=0$, если $\mathbf{E}=0$, и $\mathbf{M}=0$, если $\mathbf{B}=0$. Далее, если среда изотропна, то компонента поляризации P_x (например) зависит только от соответствующей компоненты поля E_x и не зависит от E_y и E_z. (В некоторых кристаллах вектор смещения электрона из положения равновесия не совпадает по направлению с вектором **E**. Это объясняется тем, что из-за неизотропности кристалла электрон легче смещается в одних направлениях, чем в других). Итак, для изотропной среды имеем

$$P_x=\chi E_x+\alpha E_x^2+\beta E_x^3+\ldots \tag{11}$$

Для слабых полей членами второго и более высоких порядков в уравнении (11) можно пренебречь. Это справедливо для обычных электромагнитных полей в обычных веществах. [Для сильных полей, какие (например) создаются пульсирующим рубиновым лазером, нелинейные члены в **P** могут быть существенны.] Среда называется *линейной*, если в уравнении (11) можно пренебречь членами αE_x^2, βE_x^3 и т. д. Мы видим, что «линейность» среды не является ее свойством, а зависит от силы поля.

Определение χ, χ_m, ε *и* μ *для статических полей.* В случае линейной и изотропной среды электрическая восприимчивость χ и магнитная восприимчивость χ_m (для полей, не зависящих от времени) определяются следующим образом:

$$P_x(x,\ y,\ z)=\chi(x,\ y,\ z)\,E_x(x,\ y,\ z), \tag{12}$$

$$M_x(x,\ y,\ z)=\frac{\chi_m}{\mu}B_x(x,\ y,\ z). \tag{13}$$

Диэлектрическая постоянная ε и магнитная проницаемость μ определяются так:

$$E_x+4\pi P_x=\varepsilon E_x, \tag{14}$$

$$B_x-4\pi M_x=\frac{1}{\mu}B_x. \tag{15}$$

Объединяя эти определения, получим

$$1+4\pi\chi=\varepsilon, \tag{16}$$

$$1-4\pi\frac{\chi_m}{\mu}=\frac{1}{\mu}. \tag{17}$$

[См. II том: уравнение (14) — стр. 323, уравнение (38); уравнение (15) — стр. 388, уравнение (55) для $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$ и стр. 386, уравнение (52) для $\mathbf{H}\equiv\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$. Уравнение (15) определяет $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu$.]

Восприимчивости для полей, зависящих от времени. Мы хотим распространить эти линейные соотношения на случай зависящих от времени полей в линейной изотропной среде. Можно было бы думать, что уравнение (12) будет справедливо и для переменных полей, т. е. что $P(x,\ y,\ z,\ t)=\chi E_x\,(x,\ y,\ z,\ t)$, где χ— значение, полученное из статических измерений. Как будет показано, это неверно. В общем случае электрическая и магнитная восприимчивости зависят от частоты, и «общей» для всего спектра восприимчивости не существует. Поскольку восприимчивости зависят от частоты, то можно было бы ожидать, что в общем случае уравнение (12) примет вид

$$P_x(x,\ y,\ z,\ \omega t)=\chi(x,\ y,\ z,\ \omega)\,E_x(x,\ y,\ z,\ \omega t). \tag{18}$$

Аналогичное выражение мы имели бы и для M_x. Однако мы найдем, что даже уравнение (18) слишком упрощает дело, поскольку из него следует, что P_x пропорционально E_x в любой момент времени, т. е. что P_x находится *в фазе* с E_x (с точностью до знака). В общем случае нужно предположить существование компоненты P_x, сдвинутой по фазе на $\pm 90°$ относительно E_x. Мы увидим, что компонента P_x, которая находится в фазе с E_x, не приводит к поглощению средой электромагнитной энергии. Поэтому будем называть ее «упругой» компонентой или компонентой дисперсии. Другая компонента P_x, сдвинутая на $\pm 90°$ относительно внешнего поля E_x, обуславливает поглощение энергии. Мы назовем ее «неупругой» компонентой P_x или компонентой поглощения. Величину P_x $(x, y, z, \omega t)$ запишем как сумму обеих компонент. Для линейной однородной среды упругая компонента поляризации пропорциональна E_x $(x, y, z, \omega t)$ с коэффициентом пропорциональности $\chi_{\text{упр}}$ (x, y, z, ω). Неупругая компонента пропорциональна E_x $(x, y, z, \omega t - {}^1/_2\pi)$ со своим коэффициентом пропорциональности $\chi_{\text{погл}}$ (x, y, z, ω):

$$P_x(x, y, z, \omega t) = \chi_{\text{упр}}(x, y, z, \omega) E_x(x, y, z, \omega t) + \\ + \chi_{\text{погл}}(x, y, z, \omega) E_x(x, y, z, \omega t - {}^1/_2\pi). \tag{19}$$

Рассмотрим данную точку пространства и опустим координаты x, y, z. Предположим, что в этой точке

$$E_x(\omega t) = E_0 \cos(\omega t - \varphi). \tag{20}$$

Тогда из уравнения (19) получаем

$$P_x(\omega t) = \chi_{\text{упр}} E_x(\omega t) + \chi_{\text{погл}} E_x(\omega t - {}^1/_2\pi), \tag{21}$$

т. е.

$$P_x(\omega t) = \chi_{\text{упр}} E_0 \cos(\omega t - \varphi) + \chi_{\text{погл}} E_0 \sin(\omega t - \varphi). \tag{22}$$

Простая модель линейной изотропной среды. Предположим, что в небольшой окрестности данной точки среда содержит N нейтральных атомов на единицу объема. Каждый атом состоит из частицы (электрона) с массой M и зарядом q (знак q не оговаривается), связанной упругой силой, пропорциональной смещению, с более тяжелым ядром, заряд которого равен по величине и противоположен по знаку заряду q. (Сюда мы включаем и тот случай, когда частота колебаний ω_0 равна нулю, т. е. нейтральную плазму.) Мы пренебрегаем относительно малым смещением ядер и вкладом этого смещения в $\mathbf{P}$. Мы предполагаем, что у атома нет ни постоянного, ни наведенного полями магнитного момента. Поэтому намагничение равно нулю. Далее, мы пренебрегаем флуктуациями и нерегулярностями в движении отдельных частиц и считаем, что каждая частица ведет себя как некая фиктивная средняя частица. Такое предположение означает, что каждая частица находится под действием силы электрического поля $E_x(\omega t)$ в месте нахождения частицы и некоторой средней силы, обуславливающей затухание *). Последняя учитывает потери энергии частицы вследствие соударения с соседними частицами (или вследствие излучения). Пренебрегаем также силой $q(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$, действующей на частицы, по сравнению с силой $q\mathbf{E}$. Это пренебрежение справедливо в отсутствие постоянных магнитных полей и при малых значениях отношения v/c. (Оно остается справедливым даже в случае сильных электрических полей, образованных пульсирующим рубиновым лазером.) Таким образом, мы имеем следующее уравнение движения для x-компоненты заряда:

$$M\ddot{x} = -M\omega_0^2 x - M\Gamma\dot{x} + qE_x, \tag{23}$$

где

$$E_x(\omega t) = E_0 \cos(\omega t - \varphi). \tag{24}$$

Демпфирующая сила $-M\Gamma\dot{x}$ определяет рассеяние в среде энергии колебаний заряда. Эта рассеянная энергия в конечном счете переходит в *теплоту*.

Уравнение (24) написано в предположении, что амплитуда поля E_0 и фаза φ определяются положением равновесия заряда q и не зависят от его мгновенного смещения $x(t)$ от положения равновесия. Это означает, что амплитуда колебаний заряда q очень мала по сравнению с длиной волны, характеризующей изменение

*) Для краткости мы будем называть ее демпфирующей силой.

E_x в пространстве и во времени. В противном случае следовало бы учесть зависимость E_0 и φ от смещения x.

Будем считать, что локальное поле E_x в уравнении движения (23) совпадает с усредненным по пространству полем E_x из уравнения (21). Это справедливо для газа и для некоторых кристаллов. (Во многих кристаллах электрическое поле, действующее на заряд, определяется ближайшими соседями. Поэтому в общем случае среднее локальное поле не совпадает со средним полем в пространстве.)

В п.3.2 было показано, что «установившееся» решение уравнения (23) имеет вид $x(t)=A_{упр}\cos(\omega t-\varphi)+A_{погл}\sin(\omega t-\varphi)$, где $A_{упр}\cos(\omega t-\varphi)$ — упругая компонента смещения x, т. е. та часть смещения, которая находится в фазе с возмущающей силой, а $A_{погл}\sin(\omega t-\varphi)$ — неупругая компонента смещения. Она сдвинута по фазе на $\pm 90^\circ$ относительно возмущающей силы. Упругие и неупругие амплитуды*) равны

$$A_{упр}=\frac{qE_0}{M}\,\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{25}$$

$$A_{погл}=\frac{qE_0}{M}\,\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{26}$$

Поляризация P_x равна концентрации частиц N, умноженной на дипольный момент qx, соответствующий заряду q, смещенному на x от положения равновесия. Таким образом, имеем

$$P_x(t)=Nqx(t), \tag{27}$$

т. е.

$$P_x(t)=NqA_{упр}\cos(\omega t-\varphi)+NqA_{погл}\sin(\omega t-\varphi), \tag{28}$$

т. е.

$$P_x(\omega t)=\frac{NqA_{упр}}{E_0}E_x(\omega t)+\frac{NqA_{погл}}{E_0}E_x(\omega t-{}^1/_2\pi). \tag{29}$$

Сравнивая уравнения (29 и (21), находим

$$\chi_{упр}=\frac{NqA_{упр}}{E_0}=\frac{Nq^2}{M}\,\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{30}$$

$$\chi_{погл}=\frac{NqA_{погл}}{E_0}=\frac{Nq^2}{M}\,\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{31}$$

Комплексные величины в уравнениях Максвелла. Уравнения Максвелла не содержат квадратного корня из -1. То же можно сказать и о любой из наблюдаемых величин **E**, **B**, **P** или **M**. Однако мы сильно упростим вычисления для электромагнитных волн в среде *с поглощением*, если воспользуемся комплексными величинами.

Если пренебречь поглощением, то уравнение (21) принимает более простую форму: $P_x(\omega t)=\chi(\omega)E_x(\omega t)$, где $\chi(\omega)=\chi_{упр}$. Оно аналогично уравнению (18), которое в свою очередь подобно (для нашего случая) линейному уравнению (12) для статических полей. В этом случае выражения (12)—(17), определяющие диэлектрическую постоянную и магнитную проницаемость, могут быть использованы и для переменных во времени полей.

Если поглощением пренебречь нельзя, то уравнение (18) следует заменить более сложным уравнением (21). Действительно, мы должны учесть и компоненту, сдвинутую на $\pm 90^\circ$ относительно поля (то же и для **M**). Поэтому следует рассматривать отдельные компоненты $\mathbf{E}(\omega t)$, $\mathbf{E}(\omega t-{}^1/_2\pi)$, $\mathbf{B}(\omega t)$, $\mathbf{B}(\omega t-{}^1/_2\pi)$ и соответствующие им компоненты поляризации и намагниченности.

Удобным способом избавиться от этой «бухгалтерии» является использование комплексных величин, которые мы обозначим **E**, **B**, **P** и **M**, имея в виду, что *фи-*

---

*) В главе 3 мы называли их амплитудами дисперсии и поглощения, соответственно. (*Прим. ред.*)

зические поля представляют собой вещественные части этих «комплексных полей». Временная зависимость каждого комплексного поля определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, где знак минус является условием, используемым в оптике. [В электронике работают с положительным показателем экспоненты $\exp(+i\omega t)$. В квантовой механике, как и в оптике, показатель экспоненты отрицателен.] Таким образом, E_x в комплексной записи имеет вид

$$E_x(\omega t)=E_0 e^{i\varphi} e^{-i\omega t}=E_0\cos(\omega t-\varphi)-iE_0\sin(\omega t-\varphi). \tag{32}$$

Физическое поле, соответствующее комплексному полю E_x, равно вещественной части E_x, т. е. $E_0 \cos(\omega t-\varphi)$. Упрощения, которые появляются при использовании комплексного числа $\exp(-i\omega t)$ для выражения зависимости от времени, связаны с тем, что сдвиг на 90° эквивалентен умножению на i: $e^{-i[\omega t-{}^1/_2\pi]}=e^{i{}^1/_2\pi}e^{-i\omega t}=ie^{-i\omega t}$. Таким образом,

$$E_x(\omega t-{}^1/_2\pi)=iE_x(\omega t). \tag{33}$$

Комплексная восприимчивость. Вне зависимости от того, используем мы комплексные поля или нет, физическая поляризация связана с физическим электрическим полем линейным соотношением (для линейной изотропной среды)

$$P_x(\omega t)=\chi_{\text{упр}}E_x(\omega t)+\chi_{\text{погл}}E_x(\omega t-{}^1/_2\pi), \tag{34}$$

где все величины вещественные. Введем теперь комплексную величину $E_x(\omega t)$, определяемую уравнением (32), и будем считать P_x и E_x в уравнении (34) комплексными величинами ($\chi_{\text{упр}}$ и $\chi_{\text{погл}}$ — все еще вещественные величины):

$$P_x(\omega t)=\chi_{\text{упр}}E_x(\omega t)+\chi_{\text{погл}}E_x(\omega t-{}^1/_2\pi)=\chi_{\text{упр}}E_x(\omega t)+i\chi_{\text{погл}}E_x(\omega t),$$

т. е.

$$P_x(\omega t)=\chi(\omega)E_x(\omega t), \tag{35}$$

где

$$\chi(\omega)=\chi_{\text{упр}}+i\chi_{\text{погл}}. \tag{36}$$

Физическая поляризация по оси x равна вещественной части комплексной величины P_x [уравнение (35)]. Эта комплексная величина имеет в качестве множителя сумму вещественной и мнимой частей комплексной восприимчивости: $\chi_{\text{упр}}+i\chi_{\text{погл}}$. (Восприимчивости $\chi_{\text{упр}}$ и $\chi_{\text{погл}}$ — вещественные величины.) Например, положив $\varphi=0$ в уравнении (32), имеем

$$E_x=E_0e^{-i\omega t}=E_0\cos\omega t-iE_0\sin\omega t, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}P_x&=\chi E_x=(\chi_{\text{упр}}+i\chi_{\text{погл}})(E_0\cos\omega t-iE_0\sin\omega t)=\\&=\chi_{\text{упр}}E_0\cos\omega t+\chi_{\text{погл}}E_0\sin\omega t+i\cdot(\text{мнимая часть}).\end{aligned} \tag{38}$$

Уравнения (37) и (38) дают нам вещественные части E_x и P_x. Вещественные величины $\chi_{\text{упр}}$ и $\chi_{\text{погл}}$ удовлетворяют уравнению (34), которое справедливо для физических (и поэтому вещественных) полей.

Комплексная диэлектрическая постоянная. Введя комплексные поля E_x и P_x, мы получили очень простое выражение $P_x=\chi E_x$ [уравнение (35)] вместо более сложного выражения (34). Такое упрощение далось ценой появления комплексной восприимчивости $\chi(\omega)$, определяемой уравнением (36). Уравнение (35) по форме похоже на уравнение (12) (которое справедливо для статических полей). Поэтому мы можем распространить уравнения (12)—(17) на поля, зависящие от времени. Это значит, что если нельзя пренебречь поглощением и мы хотим сохранить форму уравнений (12)—(17), то нам следует работать с комплексной диэлектрической постоянной и с комплексной магнитной проницаемостью. В соответствии с уравнениями (16) и (36) имеем

$$\varepsilon=1+4\pi\chi=1+4\pi\chi_{\text{упр}}+i\,4\pi\chi_{\text{погл}}. \tag{39}$$

Таким образом, $\varepsilon=\operatorname{Re}\varepsilon+i\operatorname{Im}\varepsilon$, где

$$\operatorname{Re}\varepsilon=1+4\pi\chi_{\text{упр}}, \tag{40}$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon=4\pi\chi_{\text{погл}}. \tag{41}$$

Для $\omega=0$ все величины принимают свои статические значения.

Комплексная диэлектрическая постоянная для простой модели линейной изотропной среды. Для нашей простой модели упруго связанного электрона, не имеющего ни постоянного, ни наведенного магнитного момента, величина $\mathbf{M}=0$. Отсюда $\chi_m=0$ и $\mu=1$ в соответствии с уравнениями (13), (15) и (17). Электрическая восприимчивость имеет вещественную (т. е. упругую) и мнимую (т. е. неупругую) составляющие, определяемые уравнениями (30) и (31). Уравнение (39) принимает вид

$$\varepsilon=1+\frac{4\pi Nq^2}{M}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}+i\frac{4\pi Nq^2}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \tag{42}$$

Заметим, что комплексные величины позволяют легко решить уравнение (23) движения заряда q:

$$\ddot{x}+\Gamma\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{q}{M}E_x=\frac{q}{M}E_0e^{-i\omega t}. \tag{43}$$

Здесь E_0 — комплексное число. Положим $x=x_0\exp(-i\omega t)$. Тогда $\dot{x}=-i\omega x$ и $\ddot{x}=-\omega^2x$. Подставляя эти производные в уравнение (43), получим

$$(-\omega^2-i\omega\Gamma+\omega_0^2)\,x=\frac{q}{M}E_x,$$

т. е.

$$x(\omega t)=\frac{q}{M}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\Gamma}E_x(\omega t). \tag{44}$$

Комплексная восприимчивость равна

$$\chi(\omega)=\frac{P_x}{E_x}=\frac{Nqx}{E_x}=\frac{Nq^2}{M}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\Gamma}. \tag{45}$$

Комплексная диэлектрическая постоянная равна

$$\varepsilon=1+4\pi\chi=1+\frac{4\pi Nq^2}{M}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\Gamma}. \tag{46}$$

Легко проверить, что уравнения (46) и (42) эквивалентны. Для этого нужно избавиться от мнимого слагаемого в знаменателе дроби в выражении (46), чтобы величину ε можно было написать как сумму $\mathrm{Re}\,\varepsilon+i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon$. Иногда более удобно оставить ε в форме (46).

Уравнения Максвелла для линейной изотропной среды. Начнем с общих уравнений Максвелла [уравнения (5)—(8)]. Предположим, что между P_x и E_x и между M_x и B_x существует линейная связь [формулы (12)—(17)]. Мы видим, что этим уравнениям можно удовлетворить действительными величинами только при $\omega=0$, но если заменить действительные величины мнимыми, уравнения (12)—(17) будут справедливы для любых частот. Таким образом, мы получаем уравнения Максвелла для комплексных полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$:

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \tag{47}$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})=4\pi\rho_{своб}, \tag{48}$$

$$\nabla\times(\mathbf{B}/\mu)=\frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{своб}, \tag{49}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{50}$$

В общем случае, когда ε и μ зависят от частоты, эти уравнения относятся к определенной частоте ω. Так как физические величины $\rho_{своб}$ и $\mathbf{J}_{своб}$ каждая могут иметь части, пропорциональные как $\cos\omega t$, так и $\sin\omega t$, то они будут вещественными частями комплексных величин, которые входят в приведенные выше уравнения. Конечно, в частном случае среды, для которой ε и μ не зависят от частоты, все величины вещественны.

Уравнения Максвелла для нейтральной, однородной, линейной и изотропной сред. В уравнениях (48) и (49) диэлектрическая постоянная ε и магнитная проницаемость μ — комплексные функции частоты ω. Эти величины также зависят от координат x, y и z, поскольку свойства среды могут меняться от точки к точке. Например, в нашей простой модели концентрация атомов N может быть функцией координат: $N=N\ (x,\ y,\ z)$.

Рассмотрим простой и важный случай, когда среда *однородна*, т. е. μ и ε не зависят от x, y и z. Тогда ε и μ в уравнениях (48) и (49) постоянны. Положим, далее, что среда *нейтральна*; под этим мы подразумеваем, что $\rho_{своб}$ и $\mathbf{J}_{своб}$ равны нулю. (Такая простая модель соответствует нейтральному газу или аморфному твердому телу.) Тогда уравнения Максвелла (47)—(50) примут вид

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \tag{51}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0, \tag{52}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{53}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{54}$$

Заметим, что, положив $\mu=1$ и $\varepsilon=1$, мы получим уравнения Максвелла для вакуума. В интересующих нас случаях μ и ε, как правило, комплексные, поэтому $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ тоже комплексные. Например, для нашей простой модели $\mu=1$ и ε — комплексное число, а физические поля соответствуют вещественным частям комплексных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Волновое уравнение. Уравнения (51)—(54) являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Уравнения (53) и (54) не разделены относительно полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$. Из них легко получить разделенные уравнения второго порядка. Образуем ротор уравнения (53) и затем используем уравнение (54):

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})=\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{E})=-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}. \tag{55}$$

Точно так же возьмем ротор уравнения (54) и используем уравнение (53):

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})=-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{56}$$

Теперь воспользуемся векторным тождеством [см. приложение I, уравнение (39)]

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{C})\equiv\nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{C})-\nabla^2\mathbf{C} \tag{57}$$

и применим его к левой части уравнения (55) и уравнения (56). Воспользовавшись равенством нулю производных $\nabla\cdot\mathbf{E}$ и $\nabla\cdot\mathbf{B}$, получим

$$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0,\qquad \nabla^2\mathbf{E}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0. \tag{58}$$

Уравнения (58) в действительности состоят из шести различных уравнений, каждое из которых имеет следующий вид:

$$\nabla^2\psi(x,\ y,\ z,\ t)-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,\ y,\ z,\ t)}{\partial t^2}=0, \tag{59}$$

где $\psi(x,\ y,\ z,\ t)$ заменяет одну из шести величин E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z.

Для специального случая, когда ε и μ вещественны, положительны и не зависят от частоты, уравнение (59) представляет собой классическое волновое уравнение для недиспергирующих волн. Эти условия выполняются в вакууме: $\mu=\varepsilon=1$. Нас интересует более общий случай нейтральной и изотропной линейной среды, где ε и μ — комплексные величины, зависящие от частоты. При этом поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ описываются комплексными величинами, зависимость которых от времени определяется множителем $\exp\,(-i\omega t)$. Таким образом, для всех шести величин, представляемых функцией $\psi(x,\ y,\ z,\ t)$, имеем

$$\psi\,(x,\ y,\ z,\ t)=\varphi\,(x,\ y,\ z)\,e^{-i\omega t}, \tag{60}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\omega^2\psi. \tag{61}$$

Подставляя уравнение (61) в уравнение (59) и сокращая на $\exp(-i\omega t)$, получим дифференциальное уравнение для функции координат $\varphi(x, y, z)$:

$$\nabla^2\varphi(x, y, z) + k^2\varphi(x, y, z) = 0. \tag{62}$$

Здесь комплексная постоянная k^2 равна

$$k^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{63}$$

Комплексный показатель преломления. Определим комплексную величину n^2, называемую *квадратом комплексного показателя преломления*, так:

$$n^2 = \mu\varepsilon; \tag{64}$$

тогда

$$k^2 = n^2\frac{\omega^2}{c^2} = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{65}$$

Заметим, что так как ε и μ — комплексные числа, то k^2 и n^2 — тоже комплексные. Мы можем вычислить корень квадратный из k^2 и n^2. Известно, что квадратный корень из комплексной величины — также комплексная величина. Таким образом, имеем комплексное волновое число k и комплексный показатель преломления n.

Решения в виде плоских волн. Общее решение уравнения (62) может быть представлено суперпозицией членов вида

$$\varphi(x, y, z) = \exp i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \exp i(k_x x + k_y y + k_z z), \tag{66}$$

где

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = n^2\frac{\omega^2}{c^2} = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{67}$$

Тогда общее решение уравнения (59) может быть записано как суперпозиция плоских бегущих волн:

$$\psi(x, y, z, t) = \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})], \tag{68}$$

где k^2 — комплексное число.

Плоские волны, распространяющиеся вдоль оси z. В качестве частного случая рассмотрим случай, когда только k_z отлично от нуля. Тогда общее решение представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлениях $+z$ и $-z$:

$$\psi(z, t) = [A^+e^{+ikz} + A^-e^{-ikz}]\,e^{-i\omega t}. \tag{69}$$

Здесь $+k$ и $-k$ — два значения квадратного корня из k^2, а A^+ и A^- — комплексные константы. Мы хотим, чтобы член $\exp[i(kz - \omega t)]$ соответствовал волне, распространяющейся в направлении $+z$; поэтому будем считать, что k соответствует корню квадратному из k^2 с положительной вещественной частью (конечно, при условии, что комплексное число k имеет вещественную часть). Если k — чисто мнимая величина, то за k принимаем значение квадратного корня из k^2, равное $+i|k|$.

Связь между **E** *и* **B** *в плоской волне.* Решение (69) справедливо для каждой из шести величин E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z, так как все они удовлетворяют волновому уравнению (59). Для получения этого волнового уравнения второго порядка мы отбросили некоторую информацию, содержащуюся в исходных уравнениях Максвелла первого порядка. Вернемся теперь к ним и соберем потерянную информацию. Из равенств $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ и $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ мы заключаем, что составляющие полей B_z и E_z постоянны (для $\mathbf{k}$, направленного по оси z). Мы не рассматриваем специальный случай нулевой частоты, поэтому эти постоянные можно положить равными нулю. Таким образом, остались лишь E_x, E_y, B_x и B_y. Для простоты рассмотрим случай линейной поляризации по оси x, когда E_x отлично от нуля, а E_y равно нулю. В соответствии с уравнением (69) имеем

$$E_x(z, t) = (E^+e^{ikz} + E^-e^{-ikz})\,e^{-i\omega t}, \tag{70}$$

где E^+ и E^- — комплексные постоянные. Из уравнений Максвелла (53) и (54) находим, что B_x равно нулю, а B_y и E_x связаны следующими уравнениями:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -c\frac{\partial E_x}{\partial z}. \tag{71}$$

Используем тот факт, что форма B_y определяется уравнением (69). Тогда уравнения (71) дают

$$B_y(z, t) = n(E^+ e^{ikz} - E^- e^{-ikz})\, e^{-i\omega t}. \tag{72}$$

Таким образом, если задано электрическое поле E_x [см. уравнение (70)], то B_y полностью определено уравнением (72). Рассмотрев ненулевую компоненту E_y, мы получили бы аналогичные результаты. В общем случае результаты заключаются в том, что для компонент поля, распространяющихся в направлениях $\pm\hat{z}$, поля **B** и **E** связаны соотношением

$$\mathbf{B}^+ = +\hat{\mathbf{z}} \times (n\mathbf{E}^+), \quad \mathbf{B}^- = -\hat{\mathbf{z}} \times (n\mathbf{E}^-), \tag{73}$$

где верхний индекс указывает на распространение по $+\hat{\mathbf{z}}$ или по $-\hat{\mathbf{z}}$. Во всех этих соотношениях n и k — в общем случае комплексные величины.

Численный пример комплексного показателя преломления. Предположим, что мы имеем среду с $\mu = 1{,}0$ и $\varepsilon = 1 + i\sqrt{3}$ для частоты ω. Тогда

$$n^2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\exp\left(i\,\frac{1}{3}\pi\right), \tag{74}$$

$$n = \sqrt{2}\exp i\,\frac{\pi}{6} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\,i\right) = 1{,}225 + 0{,}707i,$$

$$k = n\,\frac{\omega}{c} = 1{,}225\,\frac{\omega}{c} + 0{,}707i\,\frac{\omega}{c}.$$

Пусть волна линейно поляризована по оси x и распространяется в направлении $+z$. Тогда $E^- = 0$. Возьмем $E^+ = E_0$, где E_0 — вещественное число. Тогда

$$E_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{-0{,}707\,(\omega/c)\,z}\, e^{i\omega\,[(1{,}225\,z/c) - t]},$$

$$B_y = nE_x = \sqrt{2}\,E_x \exp\left(i\,\frac{\pi}{6}\right).$$

В рассмотренном примере волна распространяется в направлении $+z$. Длина волны в среде (т. е. расстояние, на котором фаза возрастает на 2π) составляет $(1{,}225)^{-1}$ длины волны в вакууме. Амплитуда волны уменьшается с расстоянием по экспоненте. Магнитное поле по величине в $\sqrt{2}$ раз больше электрического и опережает его по фазе на 30°.

Отражение и преломление плоских волн. Предположим, что среда 1 и среда 2 представляют собой различные однородные среды, плоскость раздела которых совпадает с плоскостью $z=0$. Среда 1 занимает все пространство отрицательных z, а среда 2 — все пространство положительных z. Плоская волна создается источником в $z = -\infty$. Такой источник дает волну, распространяющуюся в направлении $+z$. На границе обеих сред возникают отраженная и преломленная волны. Для простоты ограничимся нормальным перпендикулярным падением. Пусть падающая волна линейно поляризована вдоль оси x и имеет комплексную амплитуду E_x. Пусть, далее, R_{12} и T_{12} — комплексные амплитуды отраженной и преломленной волн. Имеем

$$E_x(1) = 1\cdot e^{i(k_1 z - \omega t)} + R_{12} e^{-i(k_1 z + \omega t)}, \tag{75}$$

$$E_x(2) = T_{12} e^{i(k_2 z - \omega t)}, \tag{76}$$

где $E_x(1)$ — полное поле в среде 1 (т. е. сумма пришедшего из $-z$ и отраженного полей), $E_x(2)$ — полное (т. е. преломленное) поле в среде 2, а R_{12} и T_{12} — неизвестные комплексные постоянные, которые нужно найти.

Если E_x известно, то, чтобы найти B_y в обеих средах, можно использовать уравнение (72):

$$B_y(1) = n_1 e^{i(k_1 z - \omega t)} - n_1 R_{12} e^{-i(k_1 z - \omega t)}, \tag{77}$$

$$B_y(2) = n_2 T_{12} e^{i(k_2 z - \omega t)}. \tag{78}$$

Граничные условия при $z=0$. Так как в плоскости $z=0$ имеется разрыв непрерывности, мы не можем использовать уравнения Максвелла для однородной среды при переходе через эту плоскость раздела. Вместо этого воспользуемся уравнениями Максвелла (47)—(50) для линейной изотропной среды. Предположим, что обе среды нейтральны и что в плоскости раздела нет поверхностных зарядов или токов. Представляют интерес два уравнения Максвелла, содержащие ротор поля:

$$\nabla\times(\mathbf{B}/\mu)=\frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}=-i\frac{\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}, \tag{79}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}. \tag{80}$$

В нашей задаче $\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}E_x$, а $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{y}}B_y$. В соответствии с теоремой Стокса для любого вектора $\mathbf{C}$ имеем

$$\int(\nabla\times\mathbf{C})\cdot d\mathbf{A}=\oint\mathbf{C}\cdot d\mathbf{l}, \tag{81}$$

где $d\mathbf{A}$ — элемент площади поверхности, а $d\mathbf{l}$ — элемент длины контура, ограничивающего площадь. Применим теорему (81) к вектору $\mathbf{C}\equiv\hat{\mathbf{y}}\,(B_y/\mu)$. В качестве контура интегрирования возьмем контур, состоящий из двух частей: одна часть контура является отрезком, параллельным направлению $+y$ и расположенным с одной стороны от плоскости $z=0$, а другая часть контура является таким же отрезком, параллельным первому, но расположенным с другой стороны от плоскости. Расстояние между этими отрезками равно небольшой величине Δz. При стремлении Δz к нулю площадь, охватываемая контуром, стремится к нулю; поэтому поверхностный интеграл в левой части уравнения (81) также стремится к нулю, если выражение $\nabla\times\mathbf{C}$ не бесконечно (а оно не бесконечно). Таким образом, контурный интеграл в правой части уравнения (81) равен нулю. Отсюда следует, что компонента $\mathbf{C}$, касательная границе раздела, одинакова с обеих сторон от границы. Следовательно, тангенциальная компонента $\mathbf{B}/\mu$ при переходе через границу не меняется; она непрерывна при $z=0$. Точно так же непрерывна и тангенциальная компонента $\mathbf{E}$ при $z=0$.

Непрерывность E_x при $z=0$ дает [используем уравнения (75) и (76)]

$$1+R_{12}=T_{12}. \tag{82}$$

Непрерывность $H_y=B_y/\mu$ при $z=0$ дает [используем уравнения (77) и (78)]

$$\frac{n_1}{\mu_1}(1-R_{12})=\frac{n_2}{\mu_2}T_{12}. \tag{83}$$

Определим характеристический импеданс (с точностью до коэффициента пропорциональности) следующим образом:

$$Z=\frac{\mu}{n}=\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{84}$$

Решая уравнения (82) и (83), получим

$$R_{12}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1},\qquad T_{12}=1+R_{12}. \tag{85}$$

Для специального случая, когда магнитная проницаемость μ равна единице, имеем $Z=n^{-1}$. Тогда уравнения (85) примут вид

$$R_{12}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2},\qquad T_{12}=1+R_{12}. \tag{86}$$

Для случая, когда среда 1 — вакуум, а среда 2 обладает комплексным показателем преломления $n=n_R+in_I$, уравнение для R_{12} (86) примет вид

$$R_{12}=\frac{1-n}{1+n}=\frac{(1-n_R)-in_I}{(1+n_R)+in_I}\equiv|R|\exp i\varphi. \tag{87}$$

Амплитуда отраженной волны равна произведению $|R|$ на амплитуду падающей волны. Временная зависимость для отраженной волны принимает вид $\exp(-i\omega t+i\varphi)$, где φ — *задержка* фазы, возникающая при отражении. Относительная интенсивность отраженной волны равна $|R_{12}|^2$, т. е.

$$|R_{12}|^2=\frac{(1-n_R)^2+n_I^2}{(1+n_R)^2+n_I^2}. \tag{88}$$

Пример. *Простая модель дисперсионного соотношения для проводника.* Обратимся к нашей простой модели. Положим, что «коэффициент жесткости» атома $K=M\omega^2{}_0$ в этой модели равен нулю. Это значит, что движение электронов «в среднем» описывается следующим уравнением движения:

$$\ddot{x}+\Gamma\dot{x}=\frac{q}{M}E_x. \tag{89}$$

Это уравнение движения соответствует свободным электронам, на которые, кроме силы электрического поля E_x, действует некоторая средняя сила торможения. Такова наша модель проводника. Рассмотрим постоянное электрическое поле, внезапно возникшее в момент времени $t=0$. Скорость $\dot{x}$ будет экспоненциально возрастать, пока не достигнет «конечной скорости», определяемой из условия $\ddot{x}=0$ [уравнение (89)]:

$$\dot{x}=\frac{qE_x}{\Gamma M}(1-e^{-\Gamma t});\quad \dot{x}=\frac{qE_x}{\Gamma M},\quad \text{когда}\quad t\gg\Gamma^{-1}. \tag{90}$$

Величина Γ, имеющая размерность частоты, т. е. *сек*$^{-1}$, показывает, как быстро достигается «конечная скорость». Обратная величина Γ^{-1} соответствует времени релаксации «переходных» токов при внезапном изменении поля.

Область низких частот: *«чисто активная» проводимость.* Если частота ω поля мала по сравнению с коэффициентом затухания Γ, то заряды всегда будут обладать конечной скоростью, отвечающей мгновенному значению поля E_x, и фазовое соотношение между $\dot{x}$ и E_x будет практически тем же, что и для очень малых частот. В этом случае говорят, что среда обладает *чисто активной* электрической проводимостью. Из уравнения (90) следует:

$$\dot{x}(t)=\frac{qE_x(t)}{\Gamma M},\quad \text{когда}\quad \omega\ll\Gamma. \tag{91}$$

Умножим это равенство слева и справа на Nq, т. е. на величину, которую можно назвать «концентрацией заряда». Тогда слева мы будем иметь плотность тока $Nq\dot{x}$ и формула (91) примет вид

$$\mathbf{J}_x=Nq\dot{x}=Nq\left(\frac{qE_x}{\Gamma M}\right)\equiv\sigma_{DC}E_x. \tag{92}$$

Мы получили, что плотность тока $\mathbf{J}_x$ пропорциональна электрическому полю E_x. Это *закон Ома*, и коэффициент перед E_x представляет собой «чисто активную» электрическую проводимость σ_{DC}. Формула (92) показывает, как величина σ_{DC} связана с коэффициентом затухания Γ:

$$\sigma_{DC}=\frac{Nq^2}{\Gamma M}\quad \text{для}\quad \omega\ll\Gamma. \tag{93}$$

Для больших частот скорость $\dot{x}$ наряду с компонентой, находящейся в фазе с E_x, будет иметь компоненту, сдвинутую на $\pm 90°$ относительно E_x. В этом случае, чтобы получить установившееся решение уравнения (89), удобно воспользоваться комплексными величинами с зависимостью от времени, определяемой экспонентой exp $(-i\omega t)$. [Мы получим его, если положим в решении (44) $\omega_0=0$.] Комплексная проводимость определяется следующим образом:

$$\mathbf{J}_x=Nq\dot{x}=Nq(-i\omega x)=-i\omega P_x=-i\omega\chi E_x\equiv\sigma(\omega)E_x. \tag{94}$$

Отсюда

$$\sigma(\omega)=-i\omega\chi=-i\omega(\chi_{\text{упр}}+i\chi_{\text{погл}})=\omega\chi_{\text{погл}}-i\omega\chi_{\text{упр}}. \tag{95}$$

Мы видим, что если проводимость $\sigma(\omega)$ — вещественное число, то скорость $\dot{x}$ находится в фазе с E_x и σ пропорциональна неупругой электрической восприимчивости. Величины $\chi(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ можно записать в виде выражения с комплексными знаменателями, как это сделано в уравнении (45). Если в этом уравнении положить $\omega_0=0$, то

$$\chi(\omega)=\frac{Nq^2}{M}\frac{1}{-\omega^2-i\omega\Gamma}, \tag{96}$$

$$\sigma(\omega)=-i\omega\chi(\omega)=\frac{Nq^2}{M}\frac{i\omega}{\omega^2-i\omega\Gamma}. \tag{97}$$

В приближении $\omega\ll\Gamma$ можно пренебречь ω^2 по сравнению с $\omega\Gamma$ и мы имеем

$$\chi(\omega)=i\frac{Nq^2}{M}\frac{1}{\omega\Gamma},\quad \omega\ll\Gamma, \tag{98}$$

и

$$\sigma(\omega)=\frac{Nq^2}{M\Gamma}=\sigma(0)=\sigma_{DC},\quad \omega\ll\Gamma \tag{99}$$

Мы видим, что в низкочастотном приближении $0\leqslant\omega\ll\Gamma$ проводимость $\sigma(\omega)$ вещественна и равна значению $\sigma(0)$, полученному для постоянного поля. Скорость $\dot{x}$ находится в фазе с E_x.

Комплексная электрическая восприимчивость $\chi(\omega)$ является чисто мнимой величиной для $\omega\ll\Gamma$, в соответствии с уравнением (98). В этом случае комплексное выражение для квадрата показателя преломления n^2 имеет вид

$$n^2=1+4\pi\chi=1+i\frac{4\pi Nq^2}{M}\frac{1}{\omega\Gamma}=1+i\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}, \tag{100}$$

где

$$\omega_p^2=\frac{4\pi Nq^2}{M} \tag{101}$$

— так называемая *плазменная частота.*

Мы рассмотрим два предельных случая среды с «чисто активной» проводимостью: разреженную и плотную среды.

Случай 1. *Разреженная среда.* В этом случае ω, Γ и ω_p удовлетворяют неравенствам

$$\omega_p\ll\Gamma,\quad \frac{\omega_p^2}{\Gamma}\ll\omega\ll\Gamma, \tag{102}$$

и в соответствии с уравнением (100), если пренебречь членами более высокого порядка, чем $\omega_p^2/\omega\Gamma$, мы имеем

$$n=\left[1+i\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}\right]^{1/2}\approx 1+\frac{1}{2}i\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}. \tag{103}$$

Тогда комплексное волновое число равно

$$k=n\frac{\omega}{c}=\frac{\omega}{c}+i\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{c\Gamma}=\frac{\omega}{c}+\frac{2\pi i}{c}\sigma_{DC}. \tag{104}$$

В последнем равенстве использованы уравнения (101) и (93). Вещественная часть k так же, как и в вакууме, равна ω/c. Мнимая часть волнового числа k определяет экспоненциальное затухание бегущей плоской волны. Она значительно меньше вещественной части, и поэтому средняя длина ослабления велика по сравнению с длиной волны. *Интенсивность* плоской волны пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды. Она экспоненциально уменьшается с расстоянием, и это уменьшение определяется членом $\exp(-2k_Iz)$, где k_I — мнимая часть k. Расстояние $d\equiv(2k_I)^{-1}$, на котором интенсивность уменьшается в e раз, определяется из уравнения (104):

$$\frac{1}{d}\equiv 2k_I=\frac{4\pi}{c}\sigma_{DC},\quad \text{или}\quad \frac{\rho_{DC}}{d}=\frac{4\pi}{c}. \tag{105}$$

Величина ρ/d равна сопротивлению прямоугольного параллелепипеда толщиной

d и с боковыми сторонами длиной L: $R=\rho \frac{L}{Ld}=\frac{\rho}{d}$. Из равенства (105) следует, что эта величина равна $4\pi/c=377$ *ом*. Вспомните, что сопротивление в 377 *ом* является характеристическим импедансом (не дающим отражения) для электромагнитной плоской волны (см. главу 5). Конечно, на одной длине d экспонента не дает полного поглощения. Однако отражение практически отсутствует, и на длине в несколько d волна полностью поглощается.

Если говорить более точно, то некоторое отражение все же возникает. Вещественная часть n_R практически равна единице, а мнимая часть n_I мала по сравнению с единицей, и поэтому относительная интенсивность отраженной плоской волны (при нормальном падении из вакуума) равна

$$|R|^2=\frac{(n_R-1)^2+n_I^2}{(n_R+1)^2+n_I^2}\approx\frac{0+n_I^2}{2^2+n_I^2}\approx\frac{n_I^2}{4}\ll 1. \tag{106}$$

Имея в виду уравнения (103) и (105), получим

$$|R|^2\approx\frac{1}{16}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}\right)^2=\left(\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{4d}\right)^2\ll 1, \tag{107}$$

где $\lambda\!\!\!^{-}=c/\omega$—«приведенная» длина волны в вакууме.

С л у ч а й 2. *Плотная среда*. Этот случай соответствует неравенствам

$$\omega\ll\Gamma,\quad \omega\ll\omega_p,\quad \omega\Gamma\ll\omega_p^2, \tag{108}$$

и из уравнения (100) следует, что n^2 — практически чисто мнимая величина. Извлекая корень квадратный из n^2, мы помним, что квадратный корень из i равен $[\exp(i^1/_2\pi)]^{1/2}=\exp(i^1/_4\pi)=2^{-1/2}(1+i)$. Имеем

$$n=\left[i\,\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}\right]^{1/2}=\left(\frac{\omega_p^2}{2\omega\Gamma}\right)^{1/2}(1+i)=|n|\,\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}. \tag{109}$$

Отсюда

$$k=n\frac{\omega}{c}=\sqrt{\frac{\omega}{c}}\left(\frac{\omega_p^2}{2c\Gamma}\right)^{1/2}(1+i)=\sqrt{\frac{\omega}{c}}\left(\frac{2\pi\sigma_{DC}}{c}\right)^{1/2}(1+i). \tag{110}$$

Таким образом, для плотной среды вещественная и мнимая части k равны, причем каждая из них больше, чем волновое число k в вакууме. Средняя длина ослабления (для амплитуды) k_I^{-1} мала по сравнению с длиной волны в вакууме. Таким образом, оказывается, что плоская волна, падающая из вакуума в чисто активную среду, отражается практически без поглощения. Действительно, расстояние, на которое поле проникает в среду, настолько мало, что его почувствуют лишь несколько зарядов. Заряды, «чувствующие» поле, будут двигаться со скоростью, находящейся в фазе с E_x, и будут поглощать энергию. Однако число таких зарядов столь невелико, что волна отразится практически без потери интенсивности.

Более того, величина отраженной интенсивности равна

$$|R|^2=\frac{(n_R-1)^2+n_I^2}{(n_R+1)^2+n_I^2}\approx\frac{|n|^2-2n_R}{|n|^2+2n_R}=\frac{|n|^2-\sqrt{2}\,|n|}{|n|^2+\sqrt{2}\,|n|}\approx$$

$$\approx 1-\frac{2\sqrt{2}}{|n|}=1-2\sqrt{2}\left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_p^2}\right)^{1/2}. \tag{111}$$

Так как $\omega\Gamma\ll\omega^2{}_p$, то $|R|^2\approx 1$.

Средняя длина ослабления (расстояние, на котором интенсивность уменьшается в e раз) $d=(2k_I)^{-1}$ равна

$$d=\lambda\!\!\!^{-}\sqrt{\frac{\omega\Gamma}{2\omega_p^2}}\ll\lambda\!\!\!^{-}.$$

Эта длина d мала по сравнению с длиной волны, но она все же больше в $\lambda\!\!\!^{-}/2d$ раз толщины пластины, сопротивление которой равно 377 *ом* (для постоянного тока).

Поэтому в этом случае импеданс среды мал по сравнению с импедансом, создающим согласованную нагрузку (первый случай). Вот почему знак амплитуды изменяется при отражении.

Мы видим, что существует большое количественное различие между разреженной и плотной средами с электрической проводимостью. Можно сказать, что разреженная активная среда практически непрозрачна, т. е. она «черная». Такая среда почти полностью поглощает падающее на нее излучение. В противоположность этому плотная активная среда действует как очень малая сосредоточенная нагрузка. Такая среда почти полностью отражает падающее излучение.

И, наконец, следует помнить, что все сказанное заключено в неравенствах (102) и (108). Они дают зависимость свойств проводника от частоты. Например, любой проводник, в соответствии с условием (108), ведет себя как плотная активная среда, если только частота ω достаточно мала. С другой стороны, проводник не может быть «разреженной активной средой» для любых частот, если не выполняется неравенство $\Gamma \gg \omega_p$. Если это условие удовлетворено, то проводник представляет собой разреженную активную среду в диапазоне частот, определяемом неравенством (102).

Высокочастотный предел. Уравнение (89) определяет движение отдельного «среднего» заряда. Если зависимость от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$, это уравнение можно переписать так:

$$-i\omega\dot{x}+\Gamma\dot{x}=\frac{q}{M}E_x. \tag{112}$$

Только что рассмотренный чисто низкочастотный предел соответствует случаю, когда можно пренебречь ω по сравнению с Γ. Наоборот, высокочастотный предел осуществляется, когда ω очень велико по сравнению с Γ. В этом приближении

$$\dot{x}=\frac{iq}{\omega M}E_x, \quad \omega \gg \Gamma. \tag{113}$$

Множитель i в этой формуле означает, что скорость сдвинута по фазе на 90° относительно силы и поэтому за период работа над зарядом не совершается: поглощение отсутствует*). Комплексная проводимость будет чисто мнимой:

$$J_x=Nq\dot{x}=i\frac{Nq^2}{\omega M}E_x\equiv\sigma(\omega)E_x,$$

$$\sigma(\omega)=i\frac{Nq^2}{\omega M}, \quad \omega \gg \Gamma. \tag{114}$$

[См. уравнение (97), где пренебрегаем $\omega\Gamma$ по сравнению с ω^2.]

Квадрат комплексного показателя преломления n^2 равен

$$n^2=1+4\pi\chi=1-\frac{4\pi Nq^2}{M\omega^2}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega \gg \Gamma. \tag{115}$$

В высокочастотном пределе существуют два качественно различных случая.

Случай 1. *Дисперсивная полоса частот.* Этот случай определяется неравенствами

$$\Gamma \ll \omega_p \leqslant \omega. \tag{116}$$

В соответствии с уравнением (115) запишем

$$0 \leqslant n^2 < 1, \tag{117}$$

т. е.

$$0 \leqslant n \leqslant 1. \tag{118}$$

Таким образом, для проводника в дисперсивной полосе частот показатель преломления n — вещественное число, принимающее значения между 0 и 1. Среда прозрачна, поглощение отсутствует, и фазовая скорость больше скорости света c. Отраженная интенсивность определяется множителем $(n-1)^2/(n+1)^2$.

*) По этой причине рассматриваемый диапазон частот называется также «упругим» диапазоном.

С л у ч а й 2. *Реактивная полоса частот.* Эта полоса определяется неравенством

$$\Gamma \ll \omega \leqslant \omega_p. \tag{119}$$

Тогда из уравнения (115) следует:

$$-\frac{\omega_p^2}{\Gamma^2} \ll n^2 \leqslant 0. \tag{120}$$

В этом случае n^2 отрицательно и n — чисто мнимое число:

$$n = i\,|\,n\,| = i\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right]^{1/2}$$

и

$$k = n\,\frac{\omega}{c} = i\,\frac{\omega}{c}\,|\,n\,| = i\,|\,k\,|.$$

Плоская волна в реактивной среде имеет вид

$$E_x = [A^+ e^{-|k|z} + A^- e^{+|k|z}]\, e^{-i\omega t}.$$

Если среда простирается до $z = +\infty$, то A^- равно нулю. Таким образом, плоская волна, падающая из вакуума в такую среду, должна быть полностью отражена без поглощения. Более точно отраженная интенсивность будет определяться коэффициентом

$$|\,R\,|^2 = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \approx \frac{1 + n_I^2}{1 + n_I^2} = 1.$$

В основном тексте книги мы избегали рассмотрения комплексного показателя преломления и комплексного волнового числа k. Поэтому мы почти не упоминали о поглощающих средах. Для реактивной полосы частот мы использовали символ $\varkappa$, вместо того чтобы писать $|k|$. Для дисперсивной полосы частот мы использовали символ k, поскольку здесь k — вещественное число.

Обзор свойств проводников. Теперь мы можем описать свойства любого проводника (с точки зрения выбранной модели):

1. Для достаточно низких частот любой проводник является плотной активной средой. В этом случае происходит практически полное отражение и очень малое поглощение.

2. Для достаточно высоких частот любой проводник является дисперсивной средой. Поэтому он прозрачен.

Проводники грубо можно разделить на три класса:

1. Проводник с $\Gamma \gg \omega_p$ имеет полосу частот, в которой он является разреженной активной средой. В этой полосе проводник может поглощать волны, не отражая их. Для такого проводника не существует чисто реактивной полосы частот.

2. Проводник с $\Gamma \ll \omega_p$ имеет полосу частот, в которой он является чисто реактивной средой. В этой полосе отсутствует поглощение. Для такого проводника не существует полосы частот, в которой бы он был разреженной активной средой. Поэтому он никогда не может «поглотить» плоскую волну без отражения.

3. Для проводника с $\Gamma \approx \omega_p$ не существует ни полосы частот, в которой он был бы разреженной активной средой, ни полосы, в которой он был бы чисто реактивной средой. Однако он еще обладает тем общим свойством, что при достаточно низких ω является плотной средой с электрической проводимостью, а при достаточно высоких ω он прозрачен.

П р и л о ж е н и е. *Твердое серебро.* Допустим, что твердое серебро можно описать нашей моделью. Движущиеся заряды представляют собой «электроны проводимости», источником которых являются валентные электроны атомов серебра. Валентность серебра равна единице, атомный вес 107,9 *г/моль*, плотность 10,5 *г/см*. Число Авогадро равно $6 \cdot 10^{23}$ *моль*$^{-1}$. Тогда $N \approx (6 \cdot 10^{23})\,(10{,}5)\,/(107{,}9) \approx 5{,}8 \cdot 10^{22}$. Полагая, что M и q — масса и заряд свободного электрона, находим

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{M}} = 1{,}36 \cdot 10^{16}\ \textit{рад/сек}.$$

Удельное сопротивление постоянному току $\rho_{пост}$ равно $1{,}59\cdot 10^{-6}$ *ом·см*. Но 30 *ом* равно c^{-1} ед. СГСЭ$_\rho$, где $c=3\cdot 10^{10}$ *см/сек*. Поэтому удельное сопротивление равно $1{,}8\cdot 10^{-18}$ ед. СГСЭ$_\rho$·*см* и величина Г равна

$$\Gamma=\frac{Ne^2}{M\sigma_{DC}}=\frac{\omega_p^2}{4\pi}\rho_{DC}=2{,}7\cdot 10^{13}\ сек^{-1}.$$

Мы видим, что для твердого серебра $\Gamma\ll\omega_p$. Для $\omega\ll 2{,}7\cdot 10^{13}$ *рад/сек*, в соответствии с нашей моделью, серебро является плотной «активной» средой (например, для микроволн). Для $\omega\gg 2{,}7\cdot 10^{13}$ *рад/сек* твердое серебро — чисто «упругая» среда, которая при $\omega<1{,}36\cdot 10^{16}$ *рад/сек* становится чисто «реактивной». (Этот интервал частот включает видимый свет.) Для чисто «упругой» полосы частот при $\omega>1{,}36\times\times 10^{16}$ *рад/сек* твердое серебро—прозрачная среда (например, для далекого ультрафиолета и рентгеновских лучей). Конечно, реальное серебро не следует точно этой модели. (Из-за одного упрощения: мы пренебрегли вкладами от «связанных» электронов.)

Приложение. *Графит.* Его валентность равна 4, плотность 2 *г/см*^{2} и атомный вес 12. Тогда для простой модели имеем

$$\omega_p=0{,}36\cdot 10^{17}\ рад/сек.$$

Удельное сопротивление постоянному току ρ_{DC} равно $1{,}57\cdot 10^{-15}$ ед. СГСЭ$_\rho$·*см*. Это дает

$$\Gamma=1{,}6\cdot 10^{17}\ сек^{-1}.$$

Для $\omega\ll 1{,}6\cdot 10^{17}$ *рад/сек* графит чисто активен в соответствии с моделью. Для $\omega\ll\ll 8\cdot 10^{15}$ *рад/сек* это—плотная активная среда. Для $8\cdot 10^{15}\ll\omega\ll 1{,}6\cdot 10^{17}$ это—разреженная активная среда. Поскольку отношение крайних частот этой полосы равно всего лишь 20, то оба неравенства не выполняются точно, и поэтому графит не будет совершенно разреженным для любой частоты, т. е. он не будет полностью непрозрачным для любой частоты. У графита нет реактивной полосы. Для $\omega\gg 1{,}6\times 10^{17}$ он прозрачен в соответствии с моделью.

Найдем, чему пропорциональна интенсивность отражения от графита, т. е. $|R|^2$, для видимого света в случае нашего идеализированного графита. Для зеленого света в вакууме с длиной волны 5500 Å имеем

$$\omega=2\cdot 3{,}14\,(3\cdot 10^{10})/(5{,}5\cdot 10^{-5})=3{,}42\cdot 10^{15}\ рад/сек.$$

Эта частота не попадает в область частот «плотной активной среды», для которой $\omega\ll 8\cdot 10^{15}$. Поэтому мы не можем ожидать ни 100% отражения, ни очень малого отражения. Имеем

$$n^2=\varepsilon=\varepsilon_R+i\varepsilon_I,$$

$$\varepsilon_R=1+\frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\Gamma^2}=1-\frac{(36)^2}{(3{,}42)^2+(160)^2}=0{,}951,$$

$$\varepsilon_I=\frac{\omega_p^2\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}=\frac{\omega_p^2(\Gamma/\omega)}{\omega^2+\Gamma^2}=\frac{160}{3{,}42}\frac{(36)^2}{(3{,}42)^2+(160)^2}=2{,}36,$$

$$n^2=0{,}951+2{,}36i=2{,}55\exp i\varphi,$$

где

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2{,}36}{0{,}951}\approx 68^\circ.$$

Тогда

$$n=\sqrt{2{,}55}\exp\left(i\frac{1}{2}\varphi\right)=1{,}60\,(\cos 34^\circ+i\sin 34^\circ)=1{,}33+i\,0{,}90$$

и

$$|R|^2=\frac{(n_R-1)^2+n_I^2}{(n_R+1)^2+n_I^2}=\frac{(0{,}33)^2+(0{,}90)^2}{(2{,}33)^2+(0{,}90)^2}=0{,}15.$$

Таким образом, в соответствии с нашей моделью гладкий графит отражает около 15% интенсивности зеленого света при нормальном падении.