свойства каждой ее моды очень похожи на свойства простого гармонического осциллятора, и покажем, что для любой моды свободных колебаний системы сила, действующая на каждый движущийся элемент и отнесенная к единице смещения и единице массы, одна и та же и что все движущиеся элементы колеблются с одинаковой временной зависимостью $\cos(\omega t+\varphi)$, т. е. с одинаковой частотой ω и одинаковой фазовой постоянной φ.

Любая система, которую мы будем изучать, описывается некоторой физической величиной, чье отклонение от равновесного значения зависит от координат и времени. В случае механических примеров (пусть движущиеся элементы — точечные массы, на которые действуют возвращающие силы) такой физической величиной является смещение массы в точке с координатами x, y, z от положения равновесия. Смещение описывается вектором $\psi(x, y, z, t)$. Иногда мы будем называть эту векторную функцию *волновой функцией*. Она является непрерывной функцией x, y и z только в том случае, когда движение соседних элементов почти повторяет движение данного элемента.

В случае электрических систем такой величиной является электрический ток в катушке или заряд на пластинах конденсатора. В других примерах это может быть электрическое поле $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ или магнитное поле $\mathbf{B}(x, y, z, t)$. В последних двух случаях мы имеем дело с электромагнитными волнами.

1.2. Свободные колебания систем с одной степенью свободы

Мы начнем с рассмотрения колебаний относительно среднего положения. Если положение системы в любое время может быть описано единственным параметром, то система имеет одну степень

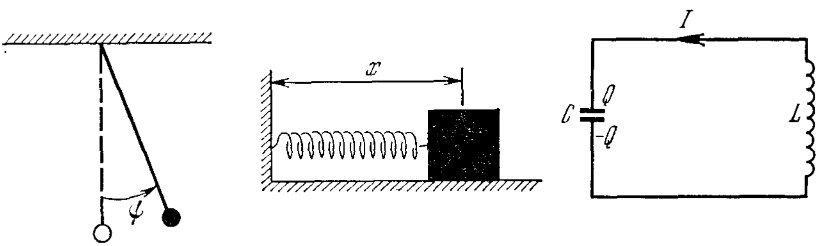

Рис. 1.1. Системы с одной степенью свободы.
Колебания маятника происходят в заданной плоскости.

свободы. Примеры таких систем: маятник, колеблющийся в заданной плоскости, масса, связанная с пружиной, LC-цепочка (рис. 1.1). Действительно, положение маятника может быть определено углом отклонения нити маятника от вертикали ψ. Для LC-цепочки таким параметром может служить величина заряда на емкости. (Маятник, способный колебаться в любом направлении подобно гире, подвешенной на нити, имеет две степени свободы; нужны две координаты, чтобы задать его положение. Маятник в стенных часах закреплен так, что может качаться только в определенной плоскости и поэтому имеет одну степень свободы.)

Для всех систем с одной степенью свободы смещение «движущегося элемента» от положения равновесия определяется одной и той же временно́й зависимостью (называемой *гармоническим колебанием*):

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi). \qquad (1)$$

Для колеблющейся массы ψ соответствует смещению массы от положения равновесия; для LC-цепи ψ — это либо ток в индуктивности, либо заряд на обкладках конденсатора.

Чтобы быть более точными, мы должны сказать, что временна́я зависимость (1) не дает правильного описания колебаний с очень большой амплитудой. [Так, при больших углах отклонения маятника уравнение (1) является лишь грубым приближением; для больших растяжений реальной пружины возвращающая сила уже не будет пропорциональна смещению и движение также не будет описываться уравнением (1); достаточно большой заряд на пластинах конденсатора вызовет его пробой, произойдет проскакивание искры между пластинами, и временно́е поведение заряда не будет удовлетворять уравнению (1).]

Терминология. В соответствии с уравнением (1) мы будем использовать следующую терминологию: A — положительная константа, называемая *амплитудой*; ω — *угловая частота*, имеющая размерность *рад/сек*; $\nu=\omega/2\pi$ — *частота*, измеряемая в герцах (*гц*) или в циклах в секунду; величина, обратная ν, называется *периодом* T и измеряется в секундах:

$$T = \frac{1}{\nu}; \qquad (2)$$

φ называется *фазовой постоянной* или *фазой* колебания. Часто значение фазы нас не интересует, и мы можем всегда «перевести часы» так, чтобы φ стало равным нулю. Тогда вместо более общего уравнения (1) имеем $\psi=A\cos\omega t$ или $\psi=A\sin\omega t$.

Возвращающая сила и инерция. Колебания, описываемые уравнением (1), являются результатом таких свойств физической системы, как *возвращающая сила* и *инерция*. Возвращающая сила стремится вернуть «движущийся элемент» в положение равновесия ($\psi=0$), в результате он приобретает скорость $d\psi/dt$. Чем больше ψ, тем больше возвращающая сила. В случае LC-цепочки возвращающая сила возникает из-за отталкивания между электронами, которое препятствует их скапливанию на одной из пластин конденсатора и стремится распределить их на пластинах так, чтобы заряд каждой пластины был равен нулю. Инерция системы противодействует любому изменению $d\psi/dt$. Инерция LC-цепочки определяется индуктивностью L, которая препятствует изменению величины тока $d\psi/dt$ (в этом случае ψ — заряд на пластинах конденсатора).

Колебательный режим. Если колебания начинаются при положительном смещении ψ и скорости $d\psi/dt$, равной нулю, то возвращающая сила создает ускорение, которое вызывает появление скорости, обратной по знаку смещению. «Отрицательная» скорость достигает максимума к моменту возвращения ψ в положение равновесия $\psi=0$. При этом возвращающая сила станет равной нулю, а наличие отрицательной скорости вызовет появление и нарастание отрицательного смещения. Возвращающая сила становится при этом положительной, но теперь она должна преодолевать инерцию, обусловленную отрицательной скоростью. Наконец, скорость станет равной нулю ($d\psi/dt=0$), а смещение — максимальным и отрицательным ($-\psi$) и процесс будет повторяться в обратной последовательности. Рассмотренный цикл повторяется: возвращающая сила пытается вернуть ψ в нулевое положение, тем самым вызывая движение с некоторой скоростью; инерция в свою очередь сохраняет скорость, что является причиной «проскакивания» ψ через нулевое положение. Система совершает колебания.

Физический смысл ω^2. Угловая частота колебаний ω связана с физическими свойствами системы (мы докажем это позже) соотношением

$$\boxed{\omega^2 = \text{возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы.}} \qquad (3)$$

Иногда, как, например, в случае LC-цепи, входящая в эту формулу «масса» имеет условный смысл, являясь лишь характеристикой инерции системы (см. пример 4).

Затухающие колебания. Если колебания некоторой системы описываются уравнением (1) и на систему не действуют никакие внешние силы, то она может совершать колебания бесконечно долго. Однако в действительности всегда имеется трение (или другое сопротивление движению), которое вызывает затухание колебаний (говорят, что трение «демпфирует» колебания). Поэтому более реальным типом колебаний являются затухающие колебания. Если система начала колебаться в момент времени $t=0$ (в этот момент мы толкнули маятник или замкнули ключ LC-цепочки и т. д.), то мы имеем (см. том I, гл. 7, стр. 236)

$$\psi(t) = Ae^{-t/2\tau}\cos(\omega t+\varphi) \qquad (4)$$

для $t \geqslant 0$ и $\psi=0$ для $t<0$. Для простоты в последующих примерах мы будем все же пользоваться уравнением (1) вместо уравнения (4). Это значит, что мы пренебрегаем трением (или сопротивлением в случае LC-цепи) и считаем время затухания τ бесконечно большим.

Пример 1. *Маятник.* Простой маятник состоит из «невесомой» нити длиной l, один конец которой закреплен, а ко второму прикреплен «точечный» груз с массой M (рис. 1.2). Обозначим через ψ угол (в *рад*) отклонения маятника от вертикали. (Маятник колеблется в заданной плоскости, и его положение полностью определяется углом ψ.) Смещение груза маятника по периметру окружности равно $l\psi$; такому смещению соответствуют мгновенная тангенциальная скорость $l\,d\psi/dt$ и тангенциальное ускорение $l\,d^2\psi/dt^2$. Возвращающая сила представляет собой тангенциальную составляющую силы веса Mg, действующей на маятник. Эта составляющая равна $-Mg\sin\psi$. По второму закону Ньютона

$$Ml\frac{d^2\psi}{dt^2} = -Mg\sin\psi(t). \tag{5}$$

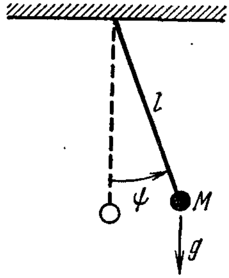

Рис. 1.2. Простой маятник.

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора [см. приложение I, уравнение (4)]:

$$\sin\psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \ldots, \tag{6}$$

где точками обозначены остальные члены ряда.

Мы видим, что для достаточно малых ψ мы можем пренебречь в (6) всеми членами, за исключением ψ. На вопрос: что значит «при достаточно малых ψ»? — нет общего ответа. Все зависит от точности измерения функции $\psi(t)$ в задуманном эксперименте (мы имеем дело с физикой, и нужно помнить, что ничто не может быть измерено совершенно точно). Например, для $\psi=0,10$ *рад* (5,7°) $\sin\psi=0,0998$, и для ряда задач «0,0998=0,1000» будет грубым приближением. С другой стороны, для $\psi=1,0$ *рад* (57,3°) $\sin\psi=0,841$, но для некоторых случаев допустимо считать «0,8=1,0».

В связи с вышесказанным уравнение (6) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\varphi, \tag{7}$$

где

$$\omega^2 = g/l. \tag{8}$$

Общее решение уравнения (7) представляет собой гармоническое колебание

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Заметим, что угловая частота колебаний (8) может быть записана так:

ω^2=возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы.

Действительно,

$$\omega^2 = \frac{Mg\psi}{(l\psi)M} = \frac{g}{l},$$

если $\sin\psi$ можно заменить на ψ: $\sin\psi\approx\psi$.

Две постоянные, A и φ, определяются по начальным условиям, например по смещению и скорости в момент $t=0$. (Величина ψ —

угловое смещение, соответствующая «скорость» — это угловая скорость $d\psi/dt$.) Таким образом, имеем

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$
$$\dot{\psi}(t) \equiv \frac{d\psi}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi),$$

так что

$$\psi(0) = A\cos\varphi,$$
$$\dot{\psi}(0) = -\omega A\sin\varphi.$$

Из этих двух уравнений можно определить положительную константу A и угол φ.

Пример 2. *Масса и пружина; продольные колебания.* Пусть масса M может скользить по поверхности без трения. Она соединена с неподвижными стенками при помощи двух одинаковых пружин, имеющих нулевую массу, коэффициент жесткости K*) и длину в нерастянутом состоянии a_0. В положении равновесия каждая пружина растянута на длину a и, таким образом, имеет натяжение $K(a-a_0)$ (рис. 1.3, *а* и *б*). Обозначим через z расстояние от левой стенки до массы M, тогда расстояние массы до правой стенки равно $2a - z$ (рис. 1.3, *в*). Левая пружина действует в направлении $-z$ с силой $K(z-a_0)$, правая пружина — в направлении $+z$ с силой $K(2a-z-a_0)$. Полная сила F_z, действующая на массу в направлении $+z$, будет равна сумме этих двух сил:

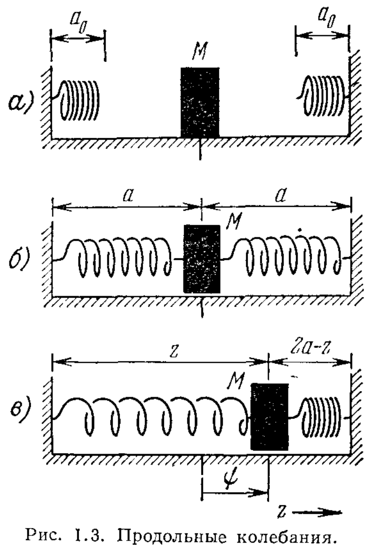

Рис. 1.3. Продольные колебания. *а*) Пружины в нерастянутом состоянии; *б*) пружины растянуты и прикреплены к грузу M, который находится в положении равновесия; *в*) общий случай.

$$F_z = -K(z-a_0) + K(2a-z-a_0) = -2K(z-a).$$

По второму закону Ньютона

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = F_z = -2K(z-a). \qquad (9)$$

Смещение массы M относительно положения равновесия равно $z-a$. Обозначим его через $\psi(t)$:

$$\psi(t) = z(t) - a,$$

тогда

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

*) Его называют также силовой постоянной пружины, а иногда просто жесткостью пружины. (*Прим. ред.*)

Теперь уравнение (9) можно переписать в виде

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi, \tag{10}$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{M}. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (10) опять представляет собой гармоническое колебание $\psi = A\cos(\omega t + \varphi)$. Заметим, что из уравнения (11) следует: ω^2=сила на единицу смещения и на единицу массы, так как возвращающая сила для смещения ψ равна $2K\psi$.

Пример 3. *Массы и пружины; поперечные колебания.* Система показана на рис. 1.4. Масса M находится между двумя одинаковыми

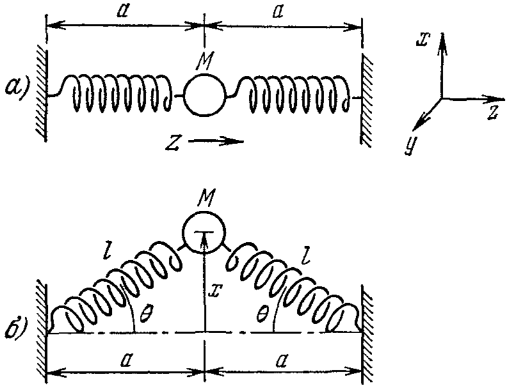

Рис. 1.4. Поперечные колебания.
а) Положение равновесия; *б*) общий случай движения (по оси *x*).

пружинами, концы которых закреплены в стенках. Пружины не имеют массы, их коэффициент жесткости K и начальная длина a_0. Когда масса M находится в положении равновесия, каждая пружина имеет длину a. Мы пренебрегаем силой тяжести. (Сила тяжести в этой задаче не образует никакой возвращающей силы. Влияние силы тяжести проявится в том, что система провиснет, но при наших приближениях это не скажется на результате.) В данном примере масса M имеет три степени свободы. Она может двигаться в направлении оси z (вдоль осей пружин), совершая продольные колебания. Этот случай был рассмотрен выше. Масса M может перемещаться также в направлениях осей x и y, совершая поперечные колебания. Для простоты будем рассматривать движение только вдоль оси x. Можно предположить, что в системе имеется какое-либо направляющее устройство (не вносящее трения), которое разрешает движение только в этом направлении и препятствует движению вдоль осей y и z. Этим устройством может быть, например, веревка, протянутая через просверленную в массе M дырку. Однако легко убедиться, что в таком приспособлении нет необходимости. Из симметрии рис. 1.4 видно, что если в данное время система колеблется вдоль оси x, то нет никаких причин, которые могли бы вызвать движение вдоль оси z или оси y. То же справедливо для каждой из двух других степеней свободы: в результате колебаний вдоль оси z не возникает силы, приводящей к движению вдоль осей x и y (или к движению вдоль x и z при колебаниях вдоль y).

В равновесии (рис. 1.4, *а*) каждая пружина имеет длину a и натяжение T_0, определяемое как

$$T_0 = K(a - a_0). \tag{12}$$

В более общем положении (рис. 1.4, *б*) каждая пружина имеет длину l и натяжение

$$T = K(l - a_0). \tag{13}$$

Это натяжение направлено вдоль оси пружины. Возвращающая сила $T\sin\theta$, действующая на массу со стороны каждой пружины в направлении x, представляет собой проекцию этого натяжения на ось x. Используя второй закон Ньютона и равенство $\sin\theta = x/l$, найдем

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -2T\sin\theta = -2K(l - a_0)\frac{x}{l} = -2Kx\left(1 - \frac{a_0}{l}\right). \tag{14}$$

Уравнение (14) верно при сделанных предположениях (включая предположение о «линейности» пружины или о справедливости для нее закона Гука (13)). Заметим, что длина пружины l, которая появляется в правой части уравнения (14), является функцией x. Из-за этого возвращающая сила, действующая на массу M, не будет в точности пропорциональна смещению и (14) не будет точным уравнением для гармонических колебаний.

Приближение «пружины». Существуют два интересных способа, которыми можно получить приближенное уравнение с линейной возвращающей силой. Первый способ—это *приближение «пружины»**), когда мы пренебрегаем членом a_0/a по сравнению с единицей. Поскольку l всегда больше, чем a, то тем более можно пренебречь и членом a_0/l в уравнении (14). В этом приближении уравнение

*) Значительное число опытов по механическим колебаниям и мысленных примеров в этом томе связано с применением «slinky». Под этим жаргонным названием (оно происходит от глагола «to slink» — красться, идти крадучись) подразумевается спиральная пружина, состоящая из 100—150 витков плоской проволоки. В нерастянутом состоянии длина такой пружины 7—10 *см*. Ее можно без остаточных деформаций растянуть до 3—5 *м*. Slinky — распространенная детская игрушка, имеющая множество применений. Slinky можно «переливать» из руки в руку, подобно струе жидкости, slinky можно заставить спуститься со ступеньки на ступеньку по лестнице и т. д. Такая игрушка является удачным объектом для демонстрации волновых явлений, и автор широко этим пользуется. В книге при различных расчетах часто используется «slinky approximation». Это — приближение, при котором начальная длина пружины, подчиняющейся закону Гука, равна нулю. В дальнейшем вместо слова slinky мы будем писать «пружина» (пружина в кавычках). Фотографию «пружины» см. на стр. 87. *(Прим. ред.)*

(14) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \tag{15}$$

где

$$\omega^2 = \frac{2K}{M} = \frac{2T_0}{Ma} \qquad (\text{для } a_0 = 0). \tag{16}$$

Решение уравнения (15) — это гармоническое колебание $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Заметим, что на амплитуду A не наложено никаких ограничений. Она может быть очень большой, но возвращающая сила будет оставаться линейной. Заметим также, что частота поперечных колебаний, определяемая уравнением (16), совпадает с частотой продольных колебаний, определяемых уравнением (11). В общем случае это не так. Частоты совпадают лишь для приближения «пружины», где предполагается $a_0=0$.

Приближение малых колебаний. Если нельзя пренебречь a_0 (например, в обычных лекционных опытах с резиновым жгутом), то приближение «пружины» неприменимо. Тогда сила F_x в уравнении (14) — нелинейная функция x. Однако мы покажем, что если x мало по сравнению с длиной a, то l отличается от a только на величину порядка $a(x/a)^2$. *В приближении малых колебаний* мы пренебрегаем теми членами в формуле для F_x, которые нелинейны по x/a. Займемся теперь алгеброй.

Мы хотим выразить l в уравнении (14) как $l=a+$ «что-то», исчезающее при $x=0$. Так как $l>a$ независимо от знака x, это «что-то» должно быть четной функцией x. Из рис. 1.4 следует:

$$l^2 = a^2 + x^2 = a^2(1+\varepsilon), \quad \text{где} \quad \varepsilon \equiv x^2/a^2.$$

Тогда

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{a}(1+\varepsilon)^{-1/2} = \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) + \left(\frac{3}{8}\varepsilon^2\right) - \dots\right], \tag{17}$$

где мы использовали разложение в ряд Тейлора [см. приложение I, уравнение (20)] для $(1+x)^n$ при $n=-{}^1/_2$ и $x=\varepsilon$. Приближение малых колебаний означает, что $\varepsilon \ll 1$. В этом случае

$$\frac{1}{l} \approx \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right] = \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)\right]. \tag{18}$$

Подставив (17) в (14), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2Kx}{M}\left(1 - \frac{a_0}{l}\right) = -\frac{2Kx}{M}\left\{1 - \frac{a_0}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right) + \dots\right]\right\} =$$
$$= -\frac{2K}{Ma}(a-a_0)x + \frac{K}{M}a_0\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \tag{19}$$

Пренебрегая членами третьего и более высокого порядка малости (малые колебания), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\frac{2K}{Ma}(a-a_0)x = -2\frac{T_0 x}{Ma}. \tag{20}$$

[Мы написали T_0 из выражения (12).]

Уравнение (20) можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

где

$$\omega^2 = \frac{2T_0}{Ma}. \tag{21}$$

Таким образом, $x(t)$ является гармоническим колебанием:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Заметим, что квадрат частоты ω^2 [формула (21)] и в этом случае равен возвращающей силе, приходящейся на единицу смещения и единицу массы. Действительно, для малых колебаний возвращающая сила равна удвоенному натяжению T_0 (две пружины), помноженному на $\sin\theta \approx x/a$.

Таким образом, имеем

$$\left.\begin{matrix}\text{Возвращающая сила на единицу}\\ \text{смещения и на единицу массы}\end{matrix}\right\} = \frac{2T_0(x/a)}{xM} = \frac{2T_0}{Ma}.$$

Заметим, что частота поперечных колебаний для обоих приближений, как следует из сравнения уравнений (16) и (21), равна $\sqrt{2T_0/Ma}$. В приближении «пружины» продольные колебания имеют ту же частоту, что видно из уравнений (11) и (16).

Если приближение «пружины» не выполняется (т. е. если нельзя пренебречь a_0/a), то продольные колебания и (малые) поперечные колебания будут происходить с разной частотой, что видно из уравнений (11), (12) и (21). В этом случае

$$(\omega^2)_{\text{прод}} = \frac{2Ka}{Ma}, \tag{22}$$

$$(\omega^2)_{\text{попер}} = \frac{2T_0}{Ma}, \quad T_0 = K(a - a_0). \tag{23}$$

Для малых колебаний резинового жгута (когда нельзя пренебречь членом a_0/a) частота продольных колебаний больше, чем поперечных:

$$\frac{\omega_{\text{прод}}}{\omega_{\text{попер}}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{a_0}{a}\right]^{1/2}}.$$

Пример 4. *LC-цепь*. (В томе II, гл. 8, колебания в цепи, состоящей из емкости и самоиндукции, изучены более подробно.) Рассмотрим цепь из последовательно соединенных самоиндукции L и двух емкостей C (рис. 1.5). Пусть заряды на верхних пластинах левого и правого конденсаторов равны Q_1 и Q_2 соответственно. Электродвижущая сила (э. д. с.), приложенная к индуктивности, равна «обратной э. д. с.» $L\,dI/dt$. Заряд Q_1 создает э. д. с. $C^{-1}Q_1$, так что положительный заряд Q_1 заставляет ток течь в направлении, указанном стрелкой на рис. 1.5. Таким образом, положительный заряд Q_1 обеспечивает положительное значение $L\,dI/dt$. Точно так же из рис. 1.5 следует, что положительный заряд Q_2 создает отрицательное значение $L\,dI/dt$. Таким образом,

$$L\frac{dI}{dt}=C^{-1}Q_1-C^{-1}Q_2. \tag{24}$$

В положении равновесия на емкостях нет заряда. Ток I увеличивает заряд Q_2 за счет заряда Q_1. Используя закон сохранения заряда и условие знаков (см. рис. 1.5), имеем

$$Q_1=-Q_2, \tag{25}$$

$$\frac{dQ_2}{dt}=I. \tag{26}$$

Из уравнений (25) и (26) следует, что в нашей задаче есть только одна степень свободы: мгновенное состояние системы можно описать, задавая или Q_1, или Q_2, или I. В дальнейшем (когда мы перейдем к системам с бóльшим числом степеней свободы) будет удобнее работать с током I, поэтому воспользуемся им и сейчас:

$$L\frac{dI}{dt}=C^{-1}Q_1-C^{-1}Q_2=-2C^{-1}Q_2,$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}=-2C^{-1}\frac{dQ_2}{dt}=-2C^{-1}I.$$

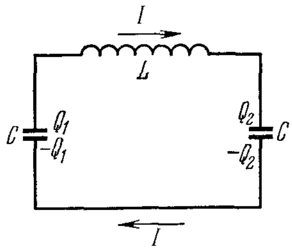

Рис. 1.5. Последовательное соединение самоиндукции L и емкостей C.

Показано условие знаков для Q и I. Заряд Q_1 (или Q_2) положителен, если верхняя обкладка заряжена положительно по отношению к нижней; ток I положителен, если положительный заряд течет в направлении стрелок.

Ток $I(t)$ подчиняется уравнению

$$\frac{d^2I}{dt^2}=-\omega^2 I,$$

где

$$\omega^2=\frac{2C^{-1}}{L}, \tag{27}$$

решением которого являются гармонические колебания $I(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$.

Уравнение (27) показывает, что и для электрических колебаний справедливо равенство

ω^2 = возвращающая сила на единицу «смещения» и на единицу «массы».

Действительно, в данном случае роль силы играет э. д. с., равная $2C^{-1}Q$, а роль «смещения» принадлежит заряду Q. Индуктивность L играет роль «массы». Поэтому выражение для ω^2 имеет вид

$$\omega^2=\frac{2C^{-1}Q}{LQ}=\frac{2}{LC}.$$

Легко заметить, что в примерах 2, 3 и 4 математика одинакова. Мы достигли этого тем, что специально подобрали примеры систем, обладающих пространственной симметрией («инерционная» масса в центре, «вынуждающие» силы приложены симметрично с каждой стороны). Такой параллелизм часто полезен как мнемоническая схема.

1.3. Линейность и принцип суперпозиции

Примеры, рассмотренные в п. 1.2, соответствуют случаю, когда возвращающая сила пропорциональна $-\psi$ и не зависит (например) от ψ^2, ψ^3 и т. д. Дифференциальное уравнение, содержащее не более чем первую степень ψ и первые степени производных $d\psi/dt$, $d^2\psi/dt^2$ и т. д., называется *линейным* относительно переменной ψ и ее производных по времени. При этом уравнение называется *однородным*, если оно не содержит членов, не зависящих от ψ. Если в уравнении появляются степени функции ψ или ее производных, то уравнение называется *нелинейным*, например, уравнение (5) нелинейно, что очевидно, если подставить в него выражение (6) для $\sin\psi$. Только пренебрегая в разложении $\sin\psi$ высокими степенями ψ, мы получим линейное уравнение.

Обычно нелинейные уравнения решать трудно. (Нелинейное уравнение для маятника было решено в т. I, стр. 251.) К счастью, существует много интересных физических ситуаций, для которых линейные уравнения дают очень хорошее приближение. Мы почти всегда будем иметь дело с линейными уравнениями.

Линейные однородные уравнения. Линейные однородные дифференциальные уравнения имеют следующее интересное и важное свойство: *сумма двух любых решений уравнения также является его решением.* Нелинейное уравнение таким свойством не обладает: сумма двух решений нелинейного уравнения не будет его решением.

Мы докажем эти положения сразу для обоих случаев (линейного и нелинейного). Предположим, что дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы имеет вид

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi + \alpha\psi^2 + \beta\psi^3 + \gamma\psi^4 + \ldots, \tag{28}$$

как это было, например, в случае маятника [см. уравнения (5) и (6)] и в случае поперечных колебаний массы, подвешенной на пружинах [уравнение (19)]. Если константы α, β и γ и т. д. все равны нулю или с достаточно хорошим приближением могут быть положены равными нулю, то уравнение (28) однородно и линейно. В противном случае оно нелинейно. Теперь предположим, что $\psi_1(t)$ — одно решение уравнения (28), соответствующее определенным начальным условиям (начальное смещение и начальная скорость гири маятника), а $\psi_2(t)$ — другое его решение, отвечающее другим начальным условиям. По сделанному выше предположению имеем

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -C\psi_1 + \alpha\psi_1^2 + \beta\psi_1^3 + \gamma\psi_1^4 + \ldots \tag{29}$$

и

$$\frac{d^2\psi_2}{dt_2} = -C\psi_2 + \alpha\psi_2^2 + \beta\psi_2^3 + \gamma\psi_2^4 + \ldots \tag{30}$$