масса в центре, «вынуждающие» силы приложены симметрично с каждой стороны). Такой параллелизм часто полезен как мнемоническая схема.

1.3. Линейность и принцип суперпозиции

Примеры, рассмотренные в п. 1.2, соответствуют случаю, когда возвращающая сила пропорциональна $-\psi$ и не зависит (например) от ψ^2, ψ^3 и т. д. Дифференциальное уравнение, содержащее не более чем первую степень ψ и первые степени производных $d\psi/dt$, $d^2\psi/dt^2$ и т. д., называется *линейным* относительно переменной ψ и ее производных по времени. При этом уравнение называется *однородным*, если оно не содержит членов, не зависящих от ψ. Если в уравнении появляются степени функции ψ или ее производных, то уравнение называется *нелинейным*, например, уравнение (5) нелинейно, что очевидно, если подставить в него выражение (6) для $\sin\psi$. Только пренебрегая в разложении $\sin\psi$ высокими степенями ψ, мы получим линейное уравнение.

Обычно нелинейные уравнения решать трудно. (Нелинейное уравнение для маятника было решено в т. I, стр. 251.) К счастью, существует много интересных физических ситуаций, для которых линейные уравнения дают очень хорошее приближение. Мы почти всегда будем иметь дело с линейными уравнениями.

Линейные однородные уравнения. Линейные однородные дифференциальные уравнения имеют следующее интересное и важное свойство: *сумма двух любых решений уравнения также является его решением.* Нелинейное уравнение таким свойством не обладает: сумма двух решений нелинейного уравнения не будет его решением.

Мы докажем эти положения сразу для обоих случаев (линейного и нелинейного). Предположим, что дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы имеет вид

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi + \alpha\psi^2 + \beta\psi^3 + \gamma\psi^4 + \ldots, \tag{28}$$

как это было, например, в случае маятника [см. уравнения (5) и (6)] и в случае поперечных колебаний массы, подвешенной на пружинах [уравнение (19)]. Если константы α, β и γ и т. д. все равны нулю или с достаточно хорошим приближением могут быть положены равными нулю, то уравнение (28) однородно и линейно. В противном случае оно нелинейно. Теперь предположим, что $\psi_1(t)$ — одно решение уравнения (28), соответствующее определенным начальным условиям (начальное смещение и начальная скорость гири маятника), а $\psi_2(t)$ — другое его решение, отвечающее другим начальным условиям. По сделанному выше предположению имеем

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -C\psi_1 + \alpha\psi_1^2 + \beta\psi_1^3 + \gamma\psi_1^4 + \ldots \tag{29}$$

и

$$\frac{d^2\psi_2}{dt_2} = -C\psi_2 + \alpha\psi_2^2 + \beta\psi_2^3 + \gamma\psi_2^4 + \ldots \tag{30}$$

Возникает вопрос: будет ли *суперпозиция* ψ_1 и ψ_2, определенная как $\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)$, удовлетворять уравнению (28), т. е. справедливо ли равенство

$$\frac{d^2(\psi_1+\psi_2)}{dt^2}=-C(\psi_1+\psi_2)+\alpha(\psi_1+\psi_2)^2+\beta(\psi_1+\psi_2)^3+\ldots? \qquad (31)$$

На вопрос (31) можно ответить утвердительно, если коэффициенты α, β и т. д. равны нулю. Это легко показать. Сложим уравнения (29) и (30). Эта сумма совпадает с уравнением (31) только в том случае, если удовлетворены следующие условия:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2}+\frac{d^2\psi_2}{dt^2}=\frac{d^2(\psi_1+\psi_2)}{dt^2}, \qquad (32)$$

$$-C\psi_1-C\psi_2=-C(\psi_1+\psi_2), \qquad (33)$$

$$\alpha\psi_1^2+\alpha\psi_2^2=\alpha(\psi_1+\psi_2)^2, \qquad (34)$$

$$\beta\psi_1^3+\beta\psi_2^3=\beta(\psi_1+\psi_2)^3 \text{ и т. д.} \qquad (35)$$

Уравнения (32) и (33) справедливы всегда. Равенства (34) и (35) неверны, если α и β не нули. Таким образом, мы видим, что суперпозиция двух решений является решением тогда и только тогда, когда уравнение линейно.

То, что суперпозиция решений также представляет собой решение, является особенностью однородного линейного уравнения. Говорят, что колебания, которые описываются такими уравнениями, подчиняются *принципу суперпозиции*. Мы не будем рассматривать никаких других колебаний.

Суперпозиция начальных условий. В качестве примера применения понятия суперпозиции рассмотрим малые колебания простого маятника. Допустим, что есть два решения уравнения: ψ_1 и ψ_2, соответствующие двум разным начальным условиям (смещение и скорость). Предположим, что есть еще одно начальное условие, которое является суммой соответствующих *начальных условий* для ψ_1 и для ψ_2. Это значит, что начальное смещение маятника представляет собой алгебраическую сумму начальных смещений $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, а начальная скорость — алгебраическую сумму скоростей, соответствующих ψ_1 и ψ_2. Чтобы найти решение ψ_3, нам достаточно просто сложить ψ_1 и ψ_2: $\psi_3=\psi_1+\psi_2$. Докажите это. Указанный результат справедлив *только* для маятника, совершающего малые колебания, когда нелинейными членами в возвращающей силе можно пренебречь.

Линейные неоднородные уравнения. Линейные *неоднородные* уравнения (т. е. уравнения, содержащие члены не зависящие от ψ) также удовлетворяют принципу суперпозиции, хотя и несколько другого рода. Существует много физических явлений, аналогичных гармоническому осциллятору, подверженному воздействию внешней вынуждающей силы $F(t)$, не зависящей от $\psi(t)$.

Уравнение движения в этих случаях имеет вид

$$\frac{Md^2\psi(t)}{dt^2}=-C\psi(t)+F(t). \qquad (36)$$

Здесь $F(t)$ — «внешняя» вынуждающая сила, не зависящая явно от смещения $\psi(t)$. В этом случае принцип суперпозиции выглядит следующим образом. Предположим, что движение $\psi_1(t)$ соответствует возмущающей силе $F_1(t)$ (в том случае, когда на систему действует только сила $F_1(t)$), а движение $\psi_2(t)$ вызывается возмущающей силой $F_2(t)$ [в том случае, когда действует только сила $F_2(t)$]. Теперь, если обе возмущающие силы, $F_1(t)$ и $F_2(t)$, действуют одновременно, так что полная возмущающая сила представляет собой суперпозицию $F_1(t)+F_2(t)$, то соответствующие колебания системы [т. е. решение уравнения (36)] будут определяться суперпозицией $\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)$. Покажите сами, что это справедливо для линейного неоднородного уравнения (36) и несправедливо для нелинейного уравнения относительно $\psi(t)$ (см. задачу 1.16).

Системы, с которыми мы имели дело в п. 1.2 и при иллюстрации принципа суперпозиции, обладают одной степенью свободы. Однако принцип суперпозиции применим для систем с любым числом степеней свободы (если уравнения линейны), и мы в дальнейшем очень часто будем им пользоваться.

Пример 5. *Сферический маятник.* Для иллюстрации применения принципа суперпозиции в случае двух степеней свободы рассмотрим движение маятника, состоящего из гири, масса которой M, подвешенной на нити длиной l. Такой маятник может свободно смещаться в любом направлении и называется *сферическим*. В положении равновесия нить вертикальна и направлена вдоль оси z. Пусть координаты гири маятника равны $x=y=0$. Для малых смещений вдоль осей x и y легко показать, что $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Mg}{l}x, \tag{37}$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{Mg}{l}y. \tag{38}$$

Эти два уравнения «не связаны». Под этим мы подразумеваем, что x-компонента силы зависит только от координаты x, но не от y, а y-компонента зависит только от y. Таким образом, (37) не содержит y, а (38) не содержит x. Уравнения (37) и (38) имеют решения

$$x(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1), \tag{39}$$

$$y(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2), \tag{40}$$

где $\omega^2=g/l$. Константы A_1, A_2, φ_1 и φ_2 определяются из начальных условий, т. е. из смещений и составляющих скоростей по направлениям x и y. Полное движение может быть представлено как *суперпозиция* движения $\hat{\mathbf{x}}x(t)$ и движения $\hat{\mathbf{y}}y(t)$, где $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ — единичные векторы. Возможность применения принципа суперпозиции основана на том, что мы можем определить отдельно движения по оси x и y, а затем просто сложить оба движения, чтобы получить результирующее движение с двумя степенями свободы.