1.4. Свободные колебания систем с двумя степенями свободы

В природе существует множество интересных систем, имеющих две степени свободы. Наиболее красивы примеры молекул и элементарных частиц (особенно нейтральных K-мезонов). Но для изучения этих систем необходимо знание квантовой механики. Более простыми примерами являются двойной маятник (один маятник подвешен к опоре, а второй — к гире первого маятника); два маятника, связанные пружиной; горизонтальная нить с двумя шариками; две связанные LC-цепи (рис. 1.6) и т. п. Чтобы описать состояние таких систем, нужны две переменные, ψ_a и ψ_b. Например,

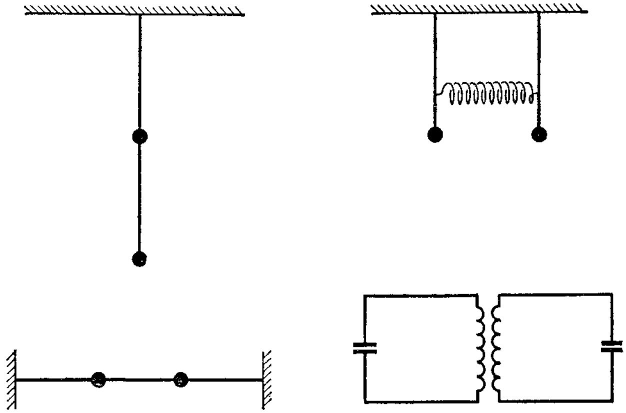

Рис. 1.6. Системы с двумя степенями свободы. Колебания масс ограничены плоскостью чертежа.

в случае сферического маятника перемепные ψ_a и ψ_b — это положения маятника в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В случае связанных маятников ψ_a и ψ_b соответствуют положениям каждого маятника; для двух связанных LC-цепей ψ_a и ψ_b представляют собой заряды на двух емкостях или токи в обеих цепях.

В общем случае движение системы с двумя степенями свободы может иметь очень сложный вид, не похожий на простое гармоническое движение.

Мы, однако, покажем, что для двух степеней свободы и при линейных уравнениях движения наиболее общее движение является *суперпозицией* двух независимых простых гармонических движений, происходящих одновременно. Эти два простых гармонических движения (описаны ниже) называются *нормальными* или *собственными колебаниями* или *гармониками*, а также *нормальными модами* колебаний или просто *модами* *).

*) В дальнейшем наряду с термином «гармоника» мы будем употреблять термин «нормальная мода» или просто «мода». Он характеризует как собственную частоту колеблющейся системы, так и ее пространственную конфигурацию. (*Прим. ред.*)

Создавая определенные начальные условия (определенные начальные значения ψ_a, ψ_b и $d\psi_a/dt$, $d\psi_b/dt$), можно приготовить систему, колебания которой соответствуют только одной из мод.

Свойства мод. Если существует лишь одна мода колебаний, то в системе совершается простое гармоническое движение. Все части системы колеблются с одной частотой, одновременно проходя через положение равновесия (для которого $\psi=0$). Например, движения $\psi_a=A\cos\omega t$ и $\psi_b=B\sin\omega t$ или $\psi_a=A\cos\omega_1 t$ и $\psi_b=B\cos\omega_2 t$ не могут соответствовать одной моде, так как в первом случае различны фазовые постоянные, а во втором — различны частоты. Пусть для одной моды (назовем ее мода 1) имеем

$$\left.\begin{aligned} \psi_a(t) &= A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1), \\ \psi_b(t) &= B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)=\frac{B_1}{A_1}\psi_a(t). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Здесь у обеих степеней свободы *одна и та же частота и фаза*.

Для моды 2 движение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \psi_a(t) &= A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), \\ \psi_b(t) &= B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)=\frac{B_2}{A_2}\psi_a(t). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Каждая мода имеет свою собственную характерную частоту: ω_1 для моды 1 и ω_2 для моды 2. Для каждой моды система имеет характерную «конфигурацию», или «форму», определяемую отношением амплитуд движений по двум направлениям: A_1/B_1 для моды 1 и A_2/B_2 для моды 2. Заметим, что для данной моды отношение ψ_a/ψ_b постоянно и не зависит от времени. Оно определяется в нашем примере отношениями A_1/B_1 или A_2/B_2, которые могут быть либо положительными, либо отрицательными.

Наиболее общим движением системы является (как мы покажем) суперпозиция, при которой движение содержит обе моды колебаний одновременно:

$$\left.\begin{aligned} \psi_a(t) &= A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), \\ \psi_b(t) &= B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 6. *Простой сферический маятник*. Этот простейший пример, к сожалению, не раскрывает всей сложности общего движения, определяемого уравнениями (43). Дело в том, что обе моды, соответствующие колебаниям относительно направлений x и y, имеют одну и ту же частоту ($\omega^2=g/l$) и в данном случае мы получаем более простой результат, следующий из уравнений (39) и (40):

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\equiv \psi_a(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1), &\quad \omega_1&=\omega, \\ y(t) &\equiv \psi_b(t)=B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), &\quad \omega_2&=\omega_1=\omega. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

В таких случаях говорят, что имеет место «вырождение» мод.

П р и м е р 7. *Двухмерный гармонический осциллятор*. На рис. 1.7 показана масса M, которая может свободно двигаться в плоскости xy. В направлении оси x она соединена со стенками двумя невесомыми пружинами с коэффициентом жесткости K_1, а в направлении y — двумя другими невесомыми пружинами с коэффициентом жесткости K_2. В случае малых колебаний, когда можно пренебречь членами x^2/a^2, y^2/a^2 и xy/a^2, мы покажем, что x-компонента возвращающей силы полностью обусловлена пружинами K_1, а y-составляющая

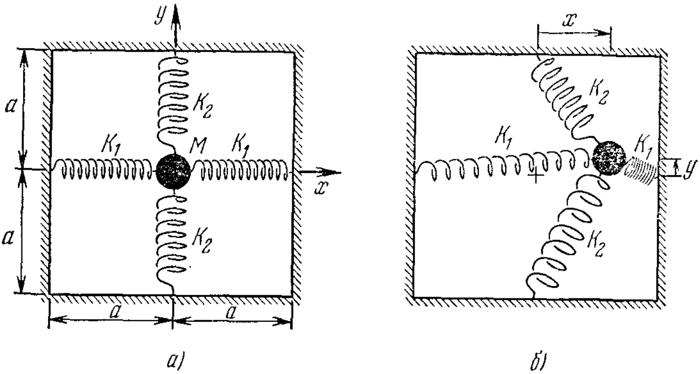

Рис. 1.7. Двухмерный гармонический осциллятор. *а*) Равновесие; *б*) общий случай движения.

возвращающей силы зависит только от пружин K_2. В этом можно убедиться, написав выражения для F_x и F_y и отбросив нелинейные члены. Проще всего это сделать следующим образом: начнем с положения равновесия (рис. 1.7, *а*). Представим себе мысленно, что масса M получила небольшое смещение x в направлении $+x$. В этом случае возвращающая сила равна

$$F_x = -2K_1x, \quad F_y = 0.$$

Теперь (из этого положения) дадим массе небольшое смещение y в направлении $+y$. Нужно выяснить, изменилось ли значение F_x. Пружины K_1 изменили длину на малую величину, пропорциональную y^2. Этим изменением мы пренебрегаем. Пружины K_2 изменили длину на величину, пропорциональную y (одна стала длиннее, другая короче), но проекция их силы на направление x также пропорциональна x. Итак, иксовая составляющая силы от пружины K_2 пропорциональна произведению двух малых величин yx, и этой составляющей мы пренебрегаем. Таким образом, величина F_x не изменилась. То же относится и к F_y. Мы получили два линейных уравнения:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -2K_1x \quad \text{и} \quad M\frac{d^2y}{dt^2} = -2K_2y, \tag{45}$$

решения которых

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \omega_1^2 = 2K_1/M, \\ y &= B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad \omega_2^2 = 2K_2/M. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Из этих уравнений следует, что движения в направлениях x и y не связаны между собой и что каждое движение представляет собой гармоническое колебание с собственной частотой. Движение вдоль оси x соответствует одной нормальной моде колебаний, а вдоль оси y — другой моде. Колебания вдоль оси x (первая мода) имеют амплитуду A_1 и фазу φ_1, которые зависят только от начальных условий $x(0)$ и $\dot{x}(0)$, т. е. от смещения и скорости в момент $t=0$. Аналогично для колебаний вдоль оси y (вторая мода) амплитуда B_2 и фаза φ_2 зависят только от начальных значений $y(0)$ и $\dot{y}(0)$.

Нормальные координаты. Заметим, что хотя решения (46) и являются общими, они не кажутся столь же общими, как, например, решения (43). В этом смысле нам очень повезло. Естественный выбор координат x и y вдоль осей пружин дал нам независимые уравнения (45), каждое из которых соответствует одной из мод. С точки зрения общих решений (43) это эквивалентно тому, что в выражении для ψ_a амплитуда A_2 равна 0, а для ψ_b равна 0 амплитуда B_1. Столь удачно выбранные нами координаты x и y называются *нормальными координатами.*

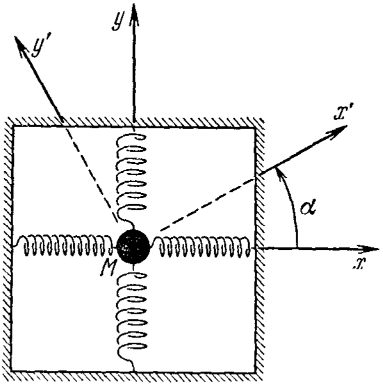

Рис. 1.8. Поворот системы координат.

Предположим теперь, что мы не так удачливы (или предусмотрительны) и работаем с системой координат x' и y', которая связана с системой x и y поворотом на угол α (рис. 1.8). Из рисунка видно, что нормальная координата x представляет собой линейную комбинацию координат x' и y'; то же следует сказать и о другой нормальной координате y. Если бы мы работали с координатами x' и y' вместо координат x и y, то должны были бы получить два «связанных» дифференциальных уравнения с переменными x' и y' в каждом уравнении.

В большинстве задач, содержащих системы с двумя степенями свободы, не так легко «на глаз» найти нормальные координаты. Как правило, уравнения движения для систем с двумя степенями свободы — это два связанных уравнения. Одним из методов решения таких связанных дифференциальных уравнений является поиск новых переменных, которые являлись бы линейной комбинацией первоначальных, неудачно выбранных координат и которые давали бы не связанные, а разделенные уравнения движения. Такие новые координаты называются нормальными.

В настоящем примере для получения нормальных координат нам нужно повернуть оси y' и x' на угол α до совпадения их с осями x и y. В более общей задаче мы должны были бы использовать более общее линейное преобразование координат, чем то, которое может быть получено простым вращением. Например, более сложное преобразование следовало бы применить в случае неортогональности пружин на рис. 1.7.

Общее решение для мод. Не рассматривая какую-нибудь конкретную физическую систему, предположим, что мы нашли два связанных линейных уравнения первого порядка не в нормальных координатах:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-a_{11}x-a_{12}y, \tag{47}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-a_{21}x-a_{22}y. \tag{48}$$

Рассмотрим колебание, соответствующее одной моде. Это значит, что обеим степеням свободы x и y соответствует гармоническое колебательное движение, совершаемое с одной и той же частотой и фазой. Таким образом,

$$x=A\cos(\omega t+\varphi), \quad y=B\cos(\omega t+\varphi), \tag{49}$$

где ω и B/A пока еще неизвестны. Мы имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y. \tag{50}$$

Подставляя уравнения (50) в уравнения (47) и (48), после элементарных преобразований получим два однородных линейных уравнения относительно x и y:

$$(a_{11}-\omega^2)x+a_{12}y=0, \tag{51}$$

$$a_{21}x+(a_{22}-\omega^2)y=0. \tag{52}$$

Каждое уравнение, (51) и (52), дает отношение y/x:

$$\frac{y}{x}=\frac{\omega^2-a_{11}}{a_{12}}, \tag{53}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{a_{21}}{\omega^2-a_{22}}. \tag{54}$$

Естественно, что должно выполняться следующее условие:

$$\frac{\omega^2-a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{\omega^2-a_{22}},$$

т. е.

$$(a_{11}-\omega^2)(a_{22}-\omega^2)-a_{21}a_{12}=0. \tag{55}$$

Левая часть уравнения (55) представляет собой определитель, составленный из коэффициентов линейных однородных уравнений (51) и (52):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\omega^2 \end{vmatrix} \equiv (a_{11}-\omega^2)(a_{22}-\omega^2)-a_{21}a_{12}=0. \tag{56}$$

Уравнение (55) или (56) является квадратным уравнением относительно переменной ω^2. Оно имеет два решения: ω_1^2 и ω_2^2. Итак, мы нашли, что существуют два способа, которыми могут быть реализованы колебания с единственной модой.

Частота ω_1 соответствует моде 1, а ω_2 — моде 2. Геометрическую конфигурацию, или форму, моды 1 мы получим, подставив в одно из уравнений (53) или (54) величину $\omega^2=\omega_1^2$. Таким образом,

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\text{мода } 1}=\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{мода } 1}=\frac{B_1}{A_1}=\frac{\omega_1^2-a_{11}}{a_{12}}. \qquad (57а)$$

Аналогично

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\text{мода } 2}=\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{мода } 2}=\frac{B_2}{A_2}=\frac{\omega_2^2-a_{11}}{a_{12}}. \qquad (57б)$$

После того, как найдены частоты мод ω_1 и ω_2 и отношения амплитуд B_1/A_1 и B_2/A_2, мы можем записать наиболее общие выражения для суперпозиции двух мод:

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), \qquad (58)$$

$$y(t)=\frac{B_1}{A_1}A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+\frac{B_2}{A_2}A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)=$$

$$=B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2). \qquad (59)$$

Заметим, что выбор постоянных A_1, φ_1, A_2 и φ_2 в уравнении (58) накладывает ограничения на возможные значения постоянных в уравнении (59), так как должны удовлетворяться уравнения (57).

Наиболее общее решение уравнений (47) и (48) состоит из комбинации двух независимых решений, которые удовлетворяют четырем начальным условиям для $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $y(0)$ и $\dot{y}(0)$. Суперпозиция двух нормальных мод, для которых четыре константы: A_1, φ_1, φ_2 и A_2 — определяются из четырех начальных условий, представляет собой такое решение. Таким образом, общее решение может быть записано (хотя не всегда в этом возникает необходимость) как суперпозиция мод.

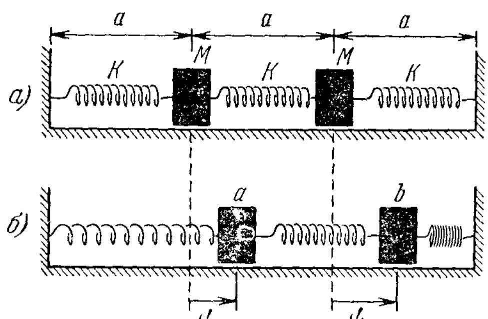

Рис. 1.9. Продольные колебания. *а)* Равновесие; *б)* общий случай движения.

Пример 8. *Продольные колебания двух связанных масс.* Исследуемая система показана на рис. 1.9. Две массы M могут скользить по поверхности стола без трения. Три одинаковые пружины невесомы, и каждая имеет коэффициент жесткости K. Предоставляем читателю найти общее решение для этой системы (задача 1.23), а здесь определим нормальные моды. Нам известно, что их должно быть две, так как колеблющаяся система имеет две степени свободы. Каждый движущийся элемент (каждая масса) в моде совершает гармоническое колебание. Это значит, что все движущиеся элементы колеблются с одинаковой частотой, т. е. *возвращающая* *сила, приходящаяся на единицу смещения и единицу массы, одинакова для обеих масс.* (В п. 1.2 мы показали, что величина ω^2 равна возвращающей силе, приходящейся на единицу массы и на единицу смещения. Это справедливо для каждого движущегося элемента, вне зависимости от того, является ли он отдельной изолированной системой с одной степенью свободы или частью большой системы. При этом на движение накладывается только одно требование: оно должно быть гармоническим движением с определенной частотой.)

В рассматриваемом примере обе массы равны. Поэтому нам нужно найти такое состояние системы, для которого величина возвращающей силы на единицу смещения оставалась бы одинаковой для обеих масс. Посмотрим, приведет ли это условне к правильному результату. Допустим, что мы сместили обе массы из положения равновесия, когда пружины не растянуты, вправо на одну и ту же величину. Будет ли возвращающая сила одинаковой для каждой массы? Заметим, что при таком смещении длина центральной пружины относительно положения равновесия не изменилась, поэтому эта пружина не действует на массы. Левая масса будет стремиться к движению влево, потому что левая пружина растянута. Поскольку правая пружина сжата на ту же длину, на какую растянута левая пружина, она будет толкать правую массу с такой же силой влево. Таким образом, мы нашли одну моду!

$$\text{Мода 1:} \quad \psi_a(t) = \psi_b(t), \quad \omega_1^2 = K/M. \tag{60}$$

Из выражения для частоты колебаний $\omega_1^2 = K/M$ в формулах (60) следует, что колебания совершаются так, как если бы центральной пружины не было.

Теперь попытаемся найти вторую моду. Из соображений симметрии можно предположить, что эта мода соответствует движению масс «a» и «b» в противоположные стороны. Если масса «a» смещена на расстояние ψ_a вправо, а масса «b» — на такое же расстояние влево, то на каждую из масс действует одинаковая возвращающая сила. Таким образом, для второй моды $\psi_b = -\psi_a$. Чтобы найти частоту ω_2, достаточно рассмотреть движение одной массы и определить для нее величину возвращающей силы, приходящуюся на единицу смещения и на единицу массы. Рассмотрим левую массу «a». Под действием левой пружины она будет двигаться влево, и на нее будет действовать сила $F_z = -K\psi_a$. Под действием правой пружины она также будет двигаться влево, и пружина действует на нее с силой $F_z = -2K\psi_a$. (Двойка появляется потому, что левая пружина сжата на $2\psi_a$.) Полная сила, действующая на массу «a» при смещении ее на ψ_a, равна $-3K\psi_a$, а частота равна $3K/M$.

$$\text{Мода 2:} \quad \psi_a = -\psi_b, \quad \omega_2^2 = 3K/M. \tag{61}$$

Обе моды колебаний показаны на рис. 1.10.

Решим эту задачу иначе, используя метод нормальных координат. Нормальные координаты являются линейной комбинацией обычных координат. Вместо двух связанных линейных уравнений нормальные координаты позволяют получить два независимых уравнения движения. Из рис. 1.9, *б* видно, что для общего случая уравнения движения имеют вид

$$M\frac{d^2\psi_a}{dt^2}=-K\psi_a+K(\psi_b-\psi_a), \tag{62}$$

$$M\frac{d^2\psi_b}{dt^2}=-K(\psi_b-\psi_a)-K\psi_b. \tag{63}$$

Легко заметить, что, сложив эти два уравнения, а затем вычтя

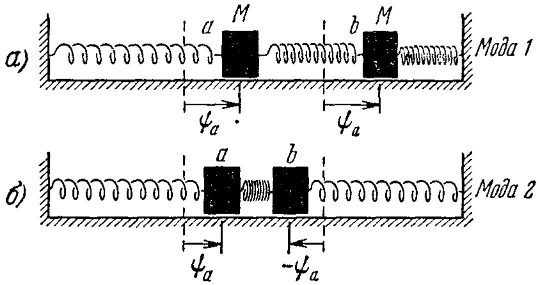

Рис. 1.10. Нормальные моды продольных колебаний.
а) Мода с меньшей частотой; *б)* мода с большей частотой.

одно из другого, мы получим два искомых независимых уравнения. Складывая (62) и (63), имеем

$$M\frac{d^2}{dt^2}(\psi_a+\psi_b)=-K(\psi_a+\psi_b). \tag{64}$$

Вычитая (63) из (62), получим

$$M\frac{d^2(\psi_a-\psi_b)}{dt^2}=-3K(\psi_a-\psi_b). \tag{65}$$

Уравнения (64) и (65) — независимые уравнения относительно координат $\psi_a+\psi_b$ и $\psi_a-\psi_b$. Их решения имеют вид

$$\psi_a+\psi_b\equiv\psi_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1),\quad \omega_1^2=K/M, \tag{66}$$

$$\psi_a-\psi_b\equiv\psi_2(t)=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2),\quad \omega_2^2=3K/M, \tag{67}$$

где A_1 и φ_1 — постоянные для моды 1, а A_2 и φ_2 — для моды 2.

Мы видим, что $\psi_1(t)$ соответствует движению центра масс, так как $\frac{1}{2}(\psi_a+\psi_b)$ определяет положение центра. (Мы могли бы разделить уравнение (64) на два и рассматривать ψ_1 как положение центра масс. Постоянный множитель $\frac{1}{2}$ несуществен.) Координата ψ_2 — это величина сжатия центральной пружины или (что то же самое) относительное смещение двух масс. При достаточной сообразительности мы сразу выбрали бы координаты ψ_1 и ψ_2, так как движение центра масс и «внутреннее движение» (относительное движение двух колеблющихся элементов) являются с физической точки зрения особенно интересными переменными. Найти простое физическое истолкование нормальных координат часто не так просто. Обычно мы будем иметь дело с нашими первоначальными координатами, даже после того, как найдем моды, потому что физический смысл этих координат может быть более понятен.

Мы нашли нормальные координаты нашей задачи ψ_1 и ψ_2. Теперь вернемся к старым координатам ψ_a и ψ_b. Решая уравнения (66) и (67), находим

$$2\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \tag{68}$$

$$2\psi_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \tag{69}$$

Заметим, что если движение соответствует моде 1, то $A_2=0$ и из уравнений (68) и (69) следует, что $\psi_b=\psi_a$. Аналогично для моды 2 имеем $A_1=0$ и $\psi_b=-\psi_a$. К этим же результатам мы пришли и раньше [см. уравнения (60) и (61)].

Пример 9. *Поперечные колебания двух связанных масс.* Система показана на рис. 1.11. Предположим, что колебания происходят в плоскости листа бумаги. У системы две степени свободы.

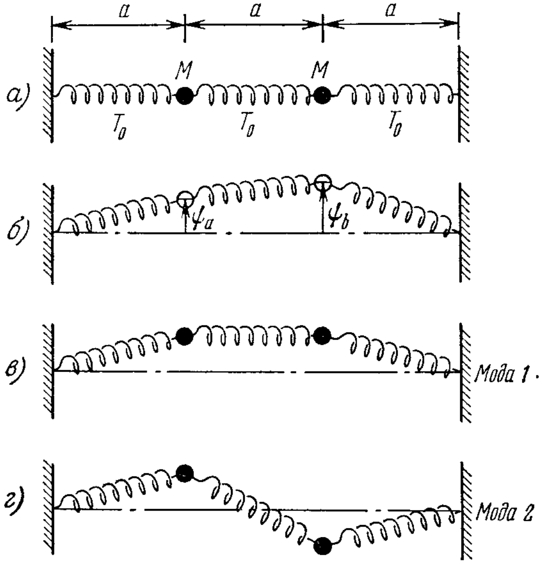

Рис. 1.11. Поперечные колебания.

а) Равновесие; *б)* общий случай движения; *в)* мода с меньшей частотой; *г)* мода с большей частотой.

Три невесомые одинаковые пружины имеют начальную длину (в нерастянутом состоянии) a_0, которая меньше, чем длина a, соответствующая положению равновесия масс. Когда система находится в состоянии равновесия (рис. 1.11, *а*), натяжение пружин равно T_0.

Симметрия системы позволяет легко догадаться о ее модах. Они показаны на рис. 1.11. Более низкая мода (мода с меньшей частотой, т. е. с меньшей величиной возвращающей силы на единицу смещения и на единицу массы, для каждой из масс) имеет такую форму (рис. 1.11, *в*), при которой центральная пружина не меняет своей длины. В этом случае частоту можно определить, рассмотрев поведение одной из масс, если помнить, что возвращающая сила образуется только той пружиной, которая прикреплена к стене. Покажем, что как для приближения «пружины» (идеальной пружины с исчезающе малой начальной длиной), так и для приближения малых колебаний (т. е. когда смещение массы мало по сравнению с a) смещение ψ_a левой массы приводит к появлению возвращающей силы $T_0(\psi_a/a)$ со стороны левой пружины. Поэтому для моды 1 возвращающая сила, приходящаяся на единицу массы и на единицу смещения, равна:

$$\text{мода 1:}\quad \omega_1^2=\frac{T_0}{Ma},\qquad \frac{\psi_b}{\psi_a}=+1. \tag{70}$$

Покажем, почему это так. Начнем с приближения «пружины» (п. 1.2). В этом приближении натяжение T больше T_0 в l/a раз, где l — длина пружины и a — длина пружины в положении равновесия (рис. 1.11, *а*). Растяжение пружины приводит к появлению поперечной возвращающей силы, равной натяжению T, умноженному на синус угла между осью наклонной пружины и осью пружины, находящейся в положении равновесия, т. е. возвращающая сила равна $T(\psi_a/l)$. Но $T=T_0(l/a)$. Таким образом, возвращающая сила $T=T_0(\psi_a/a)$, что и дает уравнение (70).

Теперь рассмотрим приближение малых колебаний (п. 1.2). В этом случае можно пренебречь увеличением длины пружины, так как она отличается от длины a в равновесном положении лишь на величину порядка $a(\psi_a/a)^2$; по этой же причине пренебрегаем и увеличением натяжения. Таким образом, смещению ψ_a соответствует натяжение T_0. Возвращающая сила равна натяжению T_0, умноженному на синус угла между осью пружины при смещении ψ_a и осью пружины в положении равновесия. При малых колебаниях угол (в *рад*) и синус угла почти равны и определяются величиной ψ_a/a. Таким образом, возвращающая сила равна $T_0(\psi_a/a)$. Такой же результат дает уравнение (70).

Рассуждая подобным образом, можно получить частоту для моды 2 (рис. 1.11, *г*). Рассмотрим левую массу. Как было показано только что, левая пружина действует на массу с силой T_0/Ma. В случае моды 2 на массу будет действовать еще сила со стороны центральной пружины. Эта поперечная сила будет в два раза больше, чем сила со стороны левой пружины, так как при одном и том же натяжении T_0 угол, составленный центральной пружиной с осью равновесия, в два раза больше. Полная возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и единицу массы, будет равна:

$$\text{мода 2:}\quad \omega_2^2=\frac{T_0}{Ma}+\frac{2T_0}{Ma}=\frac{3T_0}{Ma},\qquad \frac{\psi_b}{\psi_a}=-1. \tag{71}$$

Заметим, что в приближении «пружины», когда натяжение $T_0=K(a-a_0)$ можно считать равным $T_0=Ka$, частоты мод поперечных колебаний [уравнения (70) и (71)] совпадают с частотами мод продольных колебаний [уравнения (60) и (61)]. Таким образом, мы имеем случай вырождения. Оно не возникает при рассмотрении малых колебаний, если не пренебрегать a_0 по сравнению с a.

Если бы моды нельзя было так легко угадать, следовало бы написать уравнения движения двух масс «a» и «b» и иметь дело с этими уравнениями, а не с соображениями, основанными на визуальном рассмотрении физической системы. (См. задачу 1.20.)

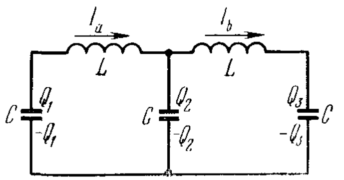

Рис. 1.12. Две связанные LC-цепочки.

Показано распределение зарядов и токов в общем случае. Стрелками показано положительное направление токов.

Пример 10. *Две связанные LC-цепочки.* Рассмотрим систему, показанную на рис. 1.12. Найдем уравнения «движения», в данном случае движения зарядов. Электродвижущая сила (э. д. с.) на левой индуктивности равна $L\ dI_a/dt$. Положительный заряд Q_1 на левой емкости образует э. д. с. $C^{-1}Q_1$, которая стремится увеличить I_a (при нашем выборе знаков).

Положительный заряд Q_2 на средней емкости образует э. д. с. $C^{-1}Q_2$, которая стремится уменьшить I_a. Таким образом, имеем

$$L\frac{dI_a}{dt}=C^{-1}Q_1-C^{-1}Q_2. \tag{72}$$

Аналогично

$$L\frac{dI_b}{dt}=C^{-1}Q_2-C^{-1}Q_3. \tag{73}$$

Так же, как и в п. 1.2, будем рассматривать поведение системы, используя понятие тока, а не заряда. Поэтому продифференцируем уравнения (72) и (73) по времени:

$$L\frac{d^2I_a}{dt^2}=C^{-1}\frac{dQ_1}{dt}-C^{-1}\frac{dQ_2}{dt}, \tag{74}$$

$$L\frac{d^2I_b}{dt^2}=C^{-1}\frac{dQ_2}{dt}-C^{-1}\frac{dQ_3}{dt}. \tag{75}$$

Воспользовавшись законом сохранения заряда, получим

$$\frac{dQ_1}{dt}=-I_a,\quad \frac{dQ_2}{dt}=I_a-I_b,\quad \frac{dQ_3}{dt}=I_b. \tag{76}$$

Подставив уравнения (76) в (74), будем иметь связанные уравнения движения

$$L\frac{d^2I_a}{dt^2}=-C^{-1}I_a+C^{-1}(I_b-I_a), \tag{77}$$

$$L\frac{d^2I_b}{dt^2}=-C^{-1}(I_b-I_a)-C^{-1}I_b. \tag{78}$$

Имеем два уравнения движения и поэтому будем искать две нормальные моды. Мы можем попытаться угадать эти моды, но можем также применить общий метод (см. задачу 1.21). Результат, который мы получим, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\text{мода 1:} \quad I_a = I_b, \quad \omega_1^2 = \frac{C^{-1}}{L}; \\ &\text{мода 2:} \quad I_a = -I_b, \quad \omega_2^2 = \frac{3C^{-1}}{L}. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Заметим, что для моды 1 центральная емкость не получает заряда и ее можно убрать. Движение зарядов при этом не изменится. Для этой моды заряды Q_1 и Q_3 всегда равны по величине и противоположны по знаку. Для моды 2 заряды Q_1 и Q_3 равны по величине и по знаку, а заряд Q_2 имеет противоположный знак и величину, в два раза большую.

Мы специально выбрали три примера (8—10): продольные колебания (рис. 1.9), поперечные колебания (рис. 1.11) и связанные LC-цепи (рис. 1.12), так как эти системы имеют одинаковую пространственную симметрию и их уравнения движения и нормальные моды имеют одну и ту же математическую форму. Эти системы рассмотрены еще и потому, что, обладая двумя степенями свободы, они являются естественным продолжением простых систем с одной степенью свободы, которые мы рассматривали в примерах 2—4 в п. 1.2 (см. рис. 1.3—1.5). Во второй главе мы обобщим эти три примера для неограниченно большого числа степеней свободы.

1.5. Биения

Во многих физических явлениях движение представляет собой суперпозицию двух гармонических колебаний, имеющих различные угловые частоты ω_1 и ω_2. Эти колебания могут, например, соответствовать двум нормальным модам системы, имеющей две степени свободы. Примером другого рода будут гармонические колебания, вызванные внешними силами. Источниками таких внешних сил могут быть, например, два камертона различной частоты. Каждый камертон издает свою собственную «ноту», которая распространяется в воздухе как звуковая волна. Движение воздуха, воспринимаемое нашей барабанной перепонкой, будет суперпозицией двух гармонических колебаний.

Во всех этих примерах математика одинакова. Для простоты допустим, что оба колебания имеют одинаковую амплитуду и одинаковую фазовую постоянную, которую положим равной нулю. Запишем суперпозицию ψ двух гармонических колебаний ψ_1 и ψ_2:

$$\psi_1 = A\cos\omega_1 t, \quad \psi_2 = A\cos\omega_2 t, \tag{80}$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t. \tag{81}$$

Модуляция. Перепишем уравнение (81) в несколько ином виде. Введем два понятия: «средняя» угловая частота $\omega_{ср}$ и угловая частота «модуляции» $\omega_{мод}$:

$$\omega_{ср} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad \omega_{мод} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \tag{82}$$