также применить общий метод (см. задачу 1.21). Результат, который мы получим, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\text{мода 1:}\quad I_a = I_b,\quad \omega_1^2 = \frac{C^{-1}}{L};\\ &\text{мода 2:}\quad I_a = -I_b,\quad \omega_2^2 = \frac{3C^{-1}}{L}. \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

Заметим, что для моды 1 центральная емкость не получает заряда и ее можно убрать. Движение зарядов при этом не изменится. Для этой моды заряды Q_1 и Q_3 всегда равны по величине и противоположны по знаку. Для моды 2 заряды Q_1 и Q_3 равны по величине и по знаку, а заряд Q_2 имеет противоположный знак и величину, в два раза большую.

Мы специально выбрали три примера (8—10): продольные колебания (рис. 1.9), поперечные колебания (рис. 1.11) и связанные LC-цепи (рис. 1.12), так как эти системы имеют одинаковую пространственную симметрию и их уравнения движения и нормальные моды имеют одну и ту же математическую форму. Эти системы рассмотрены еще и потому, что, обладая двумя степенями свободы, они являются естественным продолжением простых систем с одной степенью свободы, которые мы рассматривали в примерах 2—4 в п. 1.2 (см. рис. 1.3—1.5). Во второй главе мы обобщим эти три примера для неограниченно большого числа степеней свободы.

1.5. Биения

Во многих физических явлениях движение представляет собой суперпозицию двух гармонических колебаний, имеющих различные угловые частоты ω_1 и ω_2. Эти колебания могут, например, соответствовать двум нормальным модам системы, имеющей две степени свободы. Примером другого рода будут гармонические колебания, вызванные внешними силами. Источниками таких внешних сил могут быть, например, два камертона различной частоты. Каждый камертон издает свою собственную «ноту», которая распространяется в воздухе как звуковая волна. Движение воздуха, воспринимаемое нашей барабанной перепонкой, будет суперпозицией двух гармонических колебаний.

Во всех этих примерах математика одинакова. Для простоты допустим, что оба колебания имеют одинаковую амплитуду и одинаковую фазовую постоянную, которую положим равной нулю. Запишем суперпозицию ψ двух гармонических колебаний ψ_1 и ψ_2:

$$\psi_1 = A\cos\omega_1 t,\quad \psi_2 = A\cos\omega_2 t, \qquad (80)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t. \qquad (81)$$

Модуляция. Перепишем уравнение (81) в несколько ином виде. Введем два понятия: «средняя» угловая частота $\omega_{ср}$ и угловая частота «модуляции» $\omega_{мод}$:

$$\omega_{ср} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2),\quad \omega_{мод} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \qquad (82)$$

Сумма и разность этих частот равны

$$\omega_1 = \omega_{ср} + \omega_{мод}, \quad \omega_2 = \omega_{ср} - \omega_{мод}. \tag{83}$$

Теперь выразим суперпозицию (81) через частоты $\omega_{ср}$ и $\omega_{мод}$:

$$\psi = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = A\cos(\omega_{ср}t + \omega_{мод}t) +$$
$$+ A\cos(\omega_{ср}t - \omega_{мод}t) = [2A\cos\omega_{мод}t]\cos\omega_{ср}t,$$

т. е.

$$\psi = A_{мод}(t)\cos\omega_{ср}t, \tag{84}$$

где

$$A_{мод}(t) = 2A\cos\omega_{мод}t. \tag{85}$$

Мы можем рассматривать уравнения (84) и (85) как колебания, происходящие с угловой частотой $\omega_{ср}$ и амплитудой $A_{мод}$, которая зависит от времени в соответствии с формулой (85). Запись суперпозиции двух колебаний (81) в виде (84) и (85) удобна, если ω_1 и ω_2 близки по величине. В этом случае частота модуляции мала по сравнению со средней частотой:

$$\omega_1 \approx \omega_2, \quad \omega_{мод} \ll \omega_{ср},$$

и амплитуда модуляции $A_{мод}(t)$ будет лишь незначительно меняться в течение нескольких «быстрых» колебаний $\cos\omega_{ср}t$; поэтому суперпозиции (84) будут соответствовать почти периодические колебания с частотой $\omega_{ср}$. В том случае, когда $A_{мод}$ — константа, выражение (84) точно соответствует гармоническим колебаниям с угловой частотой $\omega_{ср}$. Если ω_1 мало отличается от ω_2, то суперпозицию двух (точно гармонических) колебаний с частотами ω_1 и ω_2 называют «почти гармоническим» или «почти монохроматическим» колебанием с частотой $\omega_{ср}$ и с очень медленно меняющейся амплитудой.

Почти гармоническое колебание. Этот первый пример приводит к важному и весьма общему результату, с которым мы будем часто встречаться: линейная суперпозиция двух или нескольких гармонических колебаний, имеющих различные амплитуды и фазовые постоянные, но принадлежащих к относительно узкому диапазону частот, дает «почти» гармоническое результирующее колебание с частотой $\omega_{ср}$, которая находится в том же частотном диапазоне. Результирующее движение не будет точно гармоническим, так как амплитуда и фазовая постоянная не являются постоянными, а лишь «почти постоянными». Они пренебрежимо мало меняются за один цикл «быстрых» колебаний, происходящих со средней частотой $\omega_{ср}$. (Это утверждение будет доказано в главе 6.) Теперь рассмотрим несколько физических примеров биений.

Пример 11. *Биения, созданные двумя камертонами.* Звуковые волны, улавливаемые ухом, создают изменения давления, действующего на барабанную перепонку. Пусть ψ_1 и ψ_2 представляют собой давления, оказываемые на ухо колебаниями двух камертонов 1 и 2. (Это давление равно давлению с внешней стороны на барабанную перепонку минус давление с внутренней стороны барабанной перепонки, которое равно атмосферному. Разность этих давлений образует силу, действующую на барабанную перепонку.)

Если по обоим камертонам ударили с одинаковой силой в один и тот же момент и они находятся на одинаковом расстоянии от уха, то амплитуды и фазовые константы для давлений ψ_1 и ψ_2 будут одинаковы, и вклад каждого из них следует из суперпозиции (80): полное давление (которое определит полную силу, действующую на перепонку) является суперпозицией $\psi=\psi_1+\psi_2$ давлений от двух камертонов. Оно выражается равенством (81) либо равенствами (84) и (85).

Если частоты ν_1 и ν_2 двух камертонов отличаются от их среднего значения более чем на 6%, то ухо и мозг будут воспринимать эти колебания согласно равенству (81), т. е. как от двух отдельных источников. Вы услышите две ноты, мало отличающиеся по высоте тона. Например, если $\nu_2=1{,}25\nu_1$, вы будете слышать две ноты с интервалом «большая терция». Если $\nu_2=1{,}06\nu_1$, то ν_2 будет восприниматься как нота, на полтона более высокая, чем ν_1. Однако, если частоты ν_1 и ν_2 отличаются меньше чем на 10 *гц*, мы не в состоянии воспринять их как две разные ноты. (Правда, натренированное ухо музыканта может это сделать.) В таком случае суперпозиция колебаний с частотами ν_1 и ν_2 не воспринимается как «аккорд» из двух нот, а скорее, в согласии с равенствами (84) и (85), как один тон с частотой $\nu_{ср}$ и медленно меняющейся амплитудой $A_{мод}$.

Квадратичный детектор. Амплитуда модуляции $A_{мод}$ колеблется с угловой частотой модуляции $\omega_{мод}$. Всякий раз, когда величина $\omega_{мод}t$ возрастает на 2π, амплитуда $A_{мод}$ совершает полный цикл колебаний и возвращается к первоначальному значению. Амплитуда $A_{мод}$ обращается в нуль дважды за цикл. В эти моменты времени звука нет, ухо ничего не слышит. В промежутках между паузами ухо воспринимает колебания среднего тона (соответствующие $\nu_{ср}$). Так как $\cos\omega_{мод}t$ изменяется от 0 до 1, от 1 до 0, от 0 до -1 и т. д., то в моменты времени, предшествующие данной паузе и после нее, амплитуда $A_{мод}$ имеет противоположные знаки. Однако наше ухо не может различить два интервала звучания с разными по знаку амплитудами $A_{мод}$. Мы можем заметить лишь изменение величины $A_{мод}$: звук станет громче или тише в зависимости от того, увеличился или уменьшился квадрат амплитуды $A_{мод}$.

Поэтому иногда говорят, что ухо является *квадратичным детектором*. Так как $A^2_{мод}$ имеет два максимума в течение каждого цикла модуляции (за цикл величина $\omega_{мод}t$ увеличивается на 2π), то частота повторения последовательности: громко, тихо, громко, тихо, громко, тихо и т. д.— в два раза больше частоты модуляции. Эта частота, с которой изменяется $A^2_{мод}$, называется *частотой биений*:

$$\omega_б=2\omega_{мод}=\omega_1-\omega_2. \tag{86}$$

Изменение квадрата амплитуды со временем легко вычислить:

$$A_{мод}(t)=2A\cos\omega_{мод}t,$$

$$[A_{мод}(t)]^2=4A^2\cos^2\omega_{мод}t,$$

но

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}[\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta] = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\theta].$$

Таким образом,

$$[A_{мод}(t)]^2 = 2A^2[1 + \cos 2\omega_{мод} t],$$

т. е.

$$(A_{мод})^2 = 2A^2[1 + \cos\omega_б t]. \qquad (87)$$

Из (87) видно, что колебания $A^2_{мод}$ происходят с частотой в два раза большей, чем $\omega_{мод}$. На рис. 1.13 показан пример биений.

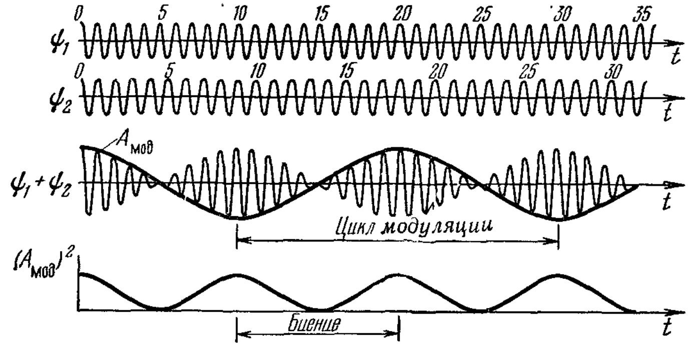

Рис. 1.13. Биения ψ_1 и ψ_2 описывают изменение давления на барабанную перепонку уха, вызванное двумя камертонами с отношением частот 10/9. Полное давление будет суперпозицией $\psi_1 + \psi_2$, представляющей собой «почти гармоническое» колебание с частотой $\nu_{ср}$ и медленно меняющейся амплитудой $A_{мод}(t)$. Громкость звука пропорциональна $(A_{мод})^2$ и имеет постоянную составляющую (среднее значение) и составляющую, меняющуюся по синусоиде с частотой биений. Частота биений равна удвоенной частоте модуляции.

Пример 12. *Биения от двух источников видимого света.* В 1955 г. Форрестер, Гудмундсен и Джонсон осуществили блестящий эксперимент, зарегистрировав биения между двумя независимыми источниками видимого света примерно одинаковой частоты *). Источниками света служили газоразрядные ртутные трубки. Возбужденные атомы ртути испускают свет с частотой $\nu_{ср} = 5{,}49 \cdot 10^{14}$ *гц*, что соответствует яркой зеленой линии спектра. Трубки были помещены в магнитное поле, и поэтому частота, соответствующая зеленой линии спектра, «расщеплялась» на две близкие частоты, разность которых пропорциональна магнитному полю. Частота биений была $\nu_1 - \nu_2 \approx 10^{10}$ *гц*. Это — типичная «радарная», или «микроволновая», частота. Используемый авторами детектор в виде фотоэлемента давал электрический ток, пропорциональный квадрату амплитуды модуляции результирующего электрического поля в световой волне. Таким образом, это был квадратичный детектор.

*) A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, P. O. Johnson, Photoelectric mixing of incoherent light (Фотоэлектрическое смешение некогерентного света), Phys. Rev. 99, 1691 (1955).

Изменение во времени выходной величины тока этого детектора аналогично изменению «громкости» $A^2_{\text{мод}}$ на рис. 1.13.

Пример 13. *Биения между двумя нормальными модами колебаний двух слабо связанных одинаковых осцилляторов.* Рассмотрим систему из двух одинаковых маятников, соединенных пружиной (рис. 1.14). Нормальные моды колебаний такой системы угадываются по аналогии со случаем продольных колебаний двух масс, рассмотренным в п. 1.4. Для моды 1 имеем $\psi_a=\psi_b$. В этом случае пружину можно не учитывать, так как возвращающая сила образуется

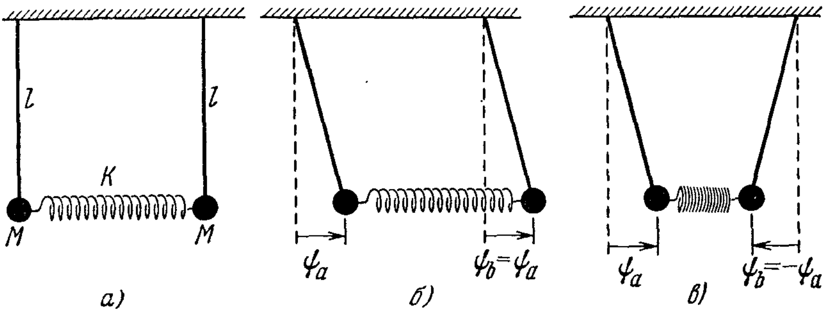

Рис. 1.14. Связанные одинаковые маятники.
а) Равновесие; *б)* мода с меньшей частотой; *в)* мода с большей частотой.

только силой тяжести. Возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы (для случая малых колебаний, когда возвращающая сила линейна) будет равна $Mg\theta/l\theta M=g/l$:

$$\text{мода 1:} \quad \omega_1^2=g/l, \quad \psi_a=\psi_b. \tag{88}$$

Для моды 2 колебаний $\psi_a=-\psi_b$. Рассмотрим левый маятник. Возвращающая сила, вызванная пружиной, равна $2K\psi_a$. (Двойка появляется потому, что пружина сжата на величину $2\psi_a$.) Возвращающая сила, обусловленная силой тяжести, равна $Mg\theta=Mg\psi_a/l$. Обе эти силы имеют одинаковый знак, поэтому полная возвращающая сила на единицу массы и на единицу смещения будет:

$$\text{мода 2:} \quad \omega_2^2=\frac{g}{l}+\frac{2K}{M}, \quad \psi_a=-\psi_b. \tag{89}$$

Мы хотим рассмотреть «биения между двумя модами колебаний» нашей системы. Что это значит? Каждая мода — это гармоническое колебание заданной частоты. В общем случае движение маятника *a* будет суперпозицией двух мод:

$$\psi_a(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t).$$

Например, ψ_a будет иметь вид, показанный на рис. 1.13, если частоты и амплитуды обеих мод примерно одинаковы. В этом случае движение маятника *a* будет представлять собой биения. (Как мы увидим, то же следует сказать и о маятнике *b*.)

В любой системе с двумя степенями свободы можно создать биения. Наша система удобна тем, что подбором пружины или массы M легко добиться, чтобы разность $\nu_1-\nu_2$ была мала по сравнению со средней частотой. [Это видно из формул (88) и (89).]

Как будут выглядеть биения? В соответствии с тем, что говорилось в п. 1.4, смещения маятников ψ_a и ψ_b могут быть выражены в нормальных координатах ψ_1 и ψ_2:

$$\left.\begin{aligned}\psi_a &= \psi_1+\psi_2 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2),\\ \psi_b &= \psi_1-\psi_2 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)-A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2).\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Эффект биений будет наибольшим, если амплитуды двух мод равны. (Если одна из амплитуд A_1 или A_2 мала по сравнению с другой, биений не будет, так как практически есть только одно гармоническое колебание.) Поэтому положим $A_1=A_2=A$. Фазовые константы φ_1 и φ_2 связаны выбором начальных условий; мы положим их равными нулю: $\varphi_1=\varphi_2=0$. Тогда равенства (90) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\psi_a(t) &= A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t,\\ \psi_b(t) &= A\cos\omega_1 t - A\cos\omega_2 t.\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Скорости маятников равны

$$\left.\begin{aligned}\dot\psi_a(t) &\equiv \frac{d\psi_a}{dt} = -\omega_1 A\sin\omega_1 t-\omega_2 A\sin\omega_2 t,\\ \dot\psi_b(t) &\equiv \frac{d\psi_b}{dt} = -\omega_1 A\sin\omega_1 t+\omega_2 A\sin\omega_2 t.\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Чтобы понять, как возбудить обе моды, чтобы получить биения, описываемые выражениями (91), рассмотрим *начальные условия* в момент времени $t=0$. В соответствии с формулами (91) и (92) начальные смещения и скорости маятников равны

$$\psi_a(0)=2A,\quad \psi_b(0)=0;\quad \dot\psi_a(0)=0,\quad \dot\psi_b(0)=0.$$

Сместим маятник a в положение $2A$, а маятник b будем удерживать в нулевой точке, затем отпустим одновременно оба маятника и примем этот момент за начало отсчета времени $t=0$. Наблюдая за маятниками, мы увидим красивое явление биений. (Обязательно сделайте этот опыт. Две банки консервов могут служить грузами M, а вместо «пружины» можно взять резиновый жгут. См. домашний опыт 1.8.) Амплитуда колебаний маятника a уменьшается, а амплитуда колебаний маятника b возрастает. В конце концов маятник a остановится, а маятник b будет иметь амплитуду и энергию колебаний, равные тем, с которыми начинал колебания маятник a. (Мы пренебрегаем трением.) При этом энергия колебаний полностью переходит от одного маятника к другому. Описанный процесс будет повторяться, и энергия колебаний будет медленно переходить от b к a и обратно. Один полный оборот энергии от a к b и опять к a представляет собой биение. Период биений — время, за которое совершается этот оборот. Обратная величина представляет собой частоту биений.

Все эти результаты можно получить из выражений (91) и (92). Имея в виду, что в (91) $\omega_1=\omega_{ср}+\omega_{мод}$ и $\omega_2=\omega_{ср}-\omega_{мод}$, получим «почти гармонические» колебания

$$\psi_a(t)=A\cos(\omega_{ср}+\omega_{мод})\,t+A\cos(\omega_{ср}-\omega_{мод})\,t= \\ =(2A\cos\omega_{мод}t)\cos\omega_{ср}t\equiv A_{мод}(t)\cos\omega_{ср}t, \qquad (93)$$

$$\psi_b(t)=A\cos(\omega_{ср}+\omega_{мод})\,t-A\cos(\omega_{ср}-\omega_{мод})\,t= \\ =(2A\sin\omega_{мод}t)\sin\omega_{ср}t\equiv B_{мод}(t)\sin\omega_{ср}t. \qquad (94)$$

Найдем выражение для полной энергии (кинетическая плюс потенциальная) каждого маятника. Будем считать амплитуду $A_{мод}(t)$ практически постоянной в течение одного цикла «быстрых» колебаний и пренебрежем энергией, передаваемой пружиной маятнику. (Если пружина очень слабая, в ней никогда не будет запасено значительное количество энергии.) Мы считаем, что в течение одного цикла «быстрых» колебаний маятник a — гармонический осциллятор с частотой $\omega_{ср}$ и постоянной амплитудой $A_{мод}$. Кинетическая энергия маятника a будет равна

$$E_a=\frac{1}{2}M\omega_{ср}^2A_{мод}^2=2MA^2\omega_{ср}^2\cos^2\omega_{мод}t. \qquad (95)$$

Аналогично

$$E_b=\frac{1}{2}M\omega_{ср}^2B_{мод}^2=2MA^2\omega_{ср}^2\sin^2\omega_{мод}t. \qquad (96)$$

Полная энергия двух маятников — величина постоянная. Действительно, сложив (95) и (96), мы получаем

$$E_a+E_b=(2MA^2\omega_{ср}^2)=E. \qquad (97)$$

Разность энергий двух маятников равна

$$E_a-E_b=E(\cos^2\omega_{мод}t-\sin^2\omega_{мод}t)=E\cos 2\omega_{мод}t=E\cos(\omega_1-\omega_2)\,t. \qquad (98)$$

Равенства (97) и (98) дают

$$E_a=\frac{1}{2}E\,[1+\cos(\omega_1-\omega_2)\,t], \qquad (99а)$$

$$E_b=\frac{1}{2}E\,[1-\cos(\omega_1-\omega_2)\,t]. \qquad (99б)$$

Из формул (99) следует, что полная энергия остается постоянной и что она переходит от одного маятника к другому с частотой биений. На рис. 1.15 показаны зависимости ψ_a, ψ_b, E_a и E_b от времени.

Примеры из квантовой физики. При изучении микроскопических систем (молекулы, элементарные частицы) можно встретить ряд красивых примеров — математических аналогов нашей системы из двух слабо связанных маятников. Для понимания этих систем необходимо знание квантовой механики. В этом случае «вещество», которое «течет» туда и обратно в микроскопической системе с двумя степенями свободы, представляет собой вероятность, а не энергию, как в случае двух слабо связанных маятников. Дело в том, что здесь энергия «квантуется» и не может «дробиться», чтобы образовать поток. Поэтому либо один движущийся элемент, либо другой имеет сразу всю энергию, а то, что «течет»,

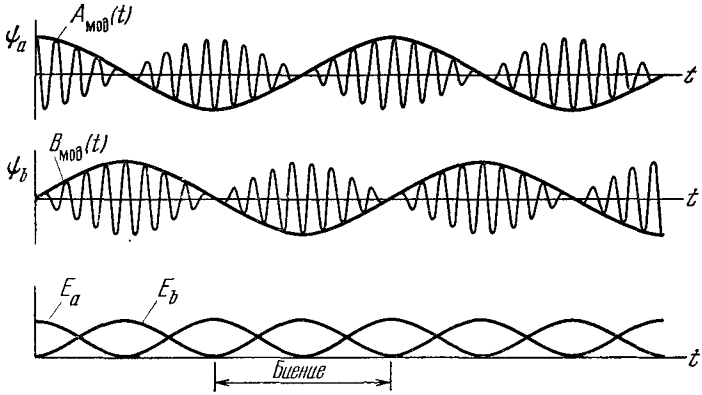

Рис. 1.15. Перемещение энергии между двумя слабо связанными одинаковыми маятниками Энергия переходит от a к b и от b к a с частотой $|\nu_1-\nu_2|$ биений обеих мод.

является вероятностью иметь данную энергию возбуждения. Два примера, с молекулами аммиака с нейтральными К-мезонами, рассмотрены в дополнении 1.

Задачи и домашние опыты

1.1. Найдите частоты двух мод (в *гц*) для LC-цепи, показанной на рис. 1.12, если $L=10$ *гн* и $C=6$ *мкф*. Нарисуйте графики токов для каждой моды.

Ответ. $\nu_1 \approx 20$ *гц*, $\nu_2 \approx 35$ *гц*.

1.2. Если положить небольшой деревянный брусок на диск проигрывателя и наблюдать за ним одним глазом (чтобы избавиться от глубинного восприятия изображения), то движение, совершаемое по линии, перпендикулярной линии взгляда, будет гармоническим, т. е. будет иметь вид $x=x_0 \cos \omega t$.

а) Докажите это утверждение.

б) Сделайте небольшой маятник, подвесив на веревке, например, болт или гайку. Длину маятника подберите такой, чтобы его движение было синхронизировано с движением деревянного бруска, лежащего на проигрывателе, при скорости 45 *об/мин*. Это будет прекрасной демонстрацией того факта, что проекция равномерного движения по окружности является гармоническим колебанием. Это также хороший способ определения ускорения силы тяжести g. Зная, чему оно равно, покажите, что $L \approx 45$ *см* при $\nu=45$ *об/мин*.

1.3. Опыт. *Экран телевизора как стробоскоп.* Светящийся экран телевизора представляет собой хороший стробоскоп. Данная точка экрана в действительности бóльшую часть времени является темной. Она светится в небольшие интервалы времени с постоянной частотой повторения. (Вы убедитесь в этом, быстро покачивая пальцем перед экраном.) Обозначим постоянную частоту повторения через $\nu_{тв}$. Целью опыта является измерение $\nu_{тв}$. Эта величина равна 50 *гц*. (Чтобы измерить $\nu_{тв}$, следует иметь стабильное, не мигающее и не ползущее, изображение.)

а) В качестве очень грубого опыта сделайте следующее. Покачивайте палец перед экраном с частотой, например, равной 4 *гц*. Наблюдайте стробоскопический эффект. Измерьте амплитуду колебаний пальца. Измерьте расстояние между соседними изображениями пальца в области максимальной скорости. Предположим,