маятников. Дело в том, что здесь энергия «квантуется» и не может «дробиться», чтобы образовать поток. Поэтому либо один движущийся элемент, либо другой имеет сразу всю энергию, а то, что «течет»,

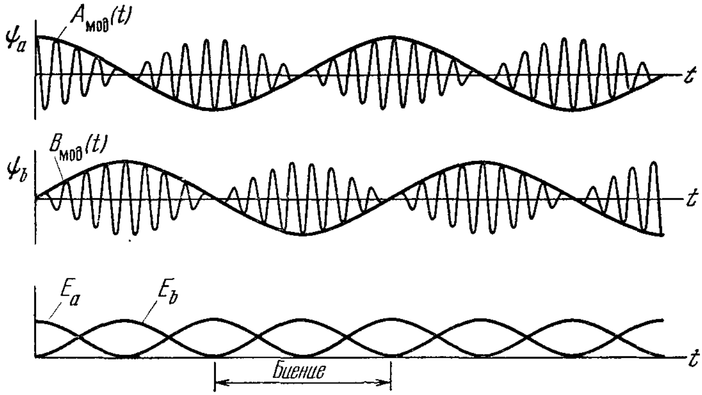

Рис. 1.15. Перемещение энергии между двумя слабо связанными одинаковыми маятниками Энергия переходит от a к b и от b к a с частотой $|\nu_1-\nu_2|$ биений обеих мод.

является вероятностью иметь данную энергию возбуждения. Два примера, с молекулами аммиака с нейтральными К-мезонами, рассмотрены в дополнении 1.

Задачи и домашние опыты

1.1. Найдите частоты двух мод (в *гц*) для LC-цепи, показанной на рис. 1.12, если $L=10$ *гн* и $C=6$ *мкф*. Нарисуйте графики токов для каждой моды.

Ответ. $\nu_1 \approx 20$ *гц*, $\nu_2 \approx 35$ *гц*.

1.2. Если положить небольшой деревянный брусок на диск проигрывателя и наблюдать за ним одним глазом (чтобы избавиться от глубинного восприятия изображения), то движение, совершаемое по линии, перпендикулярной линии взгляда, будет гармоническим, т. е. будет иметь вид $x=x_0 \cos \omega t$.

а) Докажите это утверждение.

б) Сделайте небольшой маятник, подвесив на веревке, например, болт или гайку. Длину маятника подберите такой, чтобы его движение было синхронизировано с движением деревянного бруска, лежащего на проигрывателе, при скорости 45 *об/мин*. Это будет прекрасной демонстрацией того факта, что проекция равномерного движения по окружности является гармоническим колебанием. Это также хороший способ определения ускорения силы тяжести g. Зная, чему оно равно, покажите, что $L \approx 45$ *см* при $\nu=45$ *об/мин*.

1.3. Опыт. *Экран телевизора как стробоскоп.* Светящийся экран телевизора представляет собой хороший стробоскоп. Данная точка экрана в действительности бóльшую часть времени является темной. Она светится в небольшие интервалы времени с постоянной частотой повторения. (Вы убедитесь в этом, быстро покачивая пальцем перед экраном.) Обозначим постоянную частоту повторения через $\nu_{тв}$. Целью опыта является измерение $\nu_{тв}$. Эта величина равна 50 *гц*. (Чтобы измерить $\nu_{тв}$, следует иметь стабильное, не мигающее и не ползущее, изображение.)

а) В качестве очень грубого опыта сделайте следующее. Покачивайте палец перед экраном с частотой, например, равной 4 *гц*. Наблюдайте стробоскопический эффект. Измерьте амплитуду колебаний пальца. Измерьте расстояние между соседними изображениями пальца в области максимальной скорости. Предположим, что движение синусоидально. Вычислите максимальную скорость пальца, зная амплитуду и частоту. Используйте эти данные для определения $\nu_{тв}$.

б) Используя в качестве непрозрачного экрана газету или что-либо другое, оставьте открытой в экране телевизора горизонтальную полосу шириной в несколько сантиметров. Сядьте спиной к телевизору и смотрите на экран в зеркало, которое вы держите в руках. Начните колебать зеркало, вращая его около горизонтальной оси. Объясните, что́ вы наблюдаете. Теперь закройте экран телевизора, оставив незакрытой лишь вертикальную полосу, и покачайте зеркало относительно вертикальной оси. Какие выводы можно сделать в этом случае? (Один из выводов заключается в том, что телевизор будет лучшим стробоскопом, когда закрыт весь экран, за исключением горизонтальной полосы.) Теперь уберите газету и покачайте зеркало относительно горизонтальной оси. Вы увидите в зеркало много телевизионных экранов. Сможете ли вы заметить, что отраженные в колеблющемся зеркале экраны телевизоров имеют только половину горизонтальных линий на единицу вертикальной длины по сравнению с покоящимся экраном, видимым в неподвижном зеркале?

в) Рассмотрим точный способ измерения $\nu_{тв}$ с помощью проигрывателя и стробоскопического диска, который можно сделать следующим образом. Нарисуйте круг на листе белой бумаги.Сделайте карандашом метки через угловые интервалы, которые будут определять стробоскопическую суперпозицию последовательных меток. Одну треть круга предназначьте для стробоскопирования на 100 *гц*, другую треть—на 50 *гц* и последнюю треть—на 25 *гц*. Сделайте отверстие в центре и положите круг, как пластинку, на проигрыватель.Затем осветите его светом от экрана телевизора и наблюдайте, в каком секторе круга сделанные вами метки «остановились».

1.4. Опыт. *Измерение частоты колебаний.*

а) *Струна рояля.* Теперь, зная $\nu_{тв}$ (опыт 1.3), используйте экран телевизора для определения частоты колебаний струны пианино или рояля. Осветите две самые нижние октавы светом от экрана телевизора (все это делайте вечером, когда все другие огни погашены). Опустите демпфирующую педаль и побренчите по всем струнам, проводя рукой примерно по середине струн. (Если использовать ударные молоточки рояля, то амплитуда колебаний будет слишком мала.) Вы быстро обнаружите струну, которая «стоит спокойно». Запомните ее. Затем побренчите по струнам на октаву ниже. Если вы все сделали правильно, то более низкая струна будет казаться «стоящей спокойной», но будет «двоиться». (Почему?) Вы нашли струну рояля (и соответствующую клавишу) с частотой $\nu_{тв}$. Частоту этой ноты в каждой последующей октаве можно получать умножением на два. Чтобы проверить, правильно ли настроен ваш рояль, посмотрите ответ в справочнике по физике (музыкальная шкала).

б) *Струна гитары.* Аналогичный опыт можно проделать с гитарой. Предположим, что самая низкая струна (струна E) настроена*). Осветите ее с помощью телевизора. Она не будет «стоять спокойно». Ослабьте ее. После того, как вы спуститесь примерно на кварту, т. е. перейдете от E к более низкому тону B, струна будет «стоять спокойно». Спуститесь на октаву ниже и посмотрите, будет ли струна «двоиться». (В самой низкой ноте струна ослаблена очень сильно, но все равно пригодна для опыта.) Наконец, используйте ваши результаты для определения тона E нижней струны гитары. Равен ли он E82 или E164?

1.5. Рассмотрим передачу энергии между двумя слабо связанными гармоническими осцилляторами (п. 1.5). В момент $t=0$ осциллятор a имеет всю энергию колебаний, а энергия колебаний осциллятора b равна нулю. Легко видеть, какой осциллятор находится под внешним воздействием (это осциллятор b) и какой осциллятор выполняет роль «вынуждающей силы» (осциллятор a). Теперь рассмотрим момент времени $t={}^1/_4T_б$, отстоящий от $t=0$ на четверть цикла биений. К этому моменту маятник a потерял половину своей энергии, а маятник b приобрел эту энергию; амплитуда их колебаний одинакова. Как маятники могут теперь «знать», кто из них воздействует и кто находится под воздействием, и в каком направлении

*) В Америке для основных ступеней музыкального строя (см. стр. 96) приняты следующие обозначения: A—ля, B—си, C—до, D—ре, E—ми, F—фа, G—соль. Следующая за буквой цифра означает частоту в *гц*. (*Прим. ред.*)

должна течь энергия? Предположим, что вы можете наблюдать за системой и следить за ней в течение одного колебания («быстрого» колебания с частотой ω_1 или ω_2) в то время, когда оба маятника имеют одинаковую энергию. Предскажите, каким будет распределение энергии: а) останется таким же; б) изменится так, что энергия осциллятора b будет возрастать; в) изменится иначе. Попытайтесь не пользоваться формулами, а получить ответ, наблюдая за системой. (Указание. Решающее значение имеют фазовые соотношения.)

1.6. Придумайте демпфирующий механизм («трение»), который будет демпфировать только моду 1 связанных маятников (рис. 1.14). Придумайте другой механизм, который будет демпфировать только моду 2. Обратите внимание на то, что трение в подвесе демпфирует *обе* моды. То же можно сказать про сопротивление воздуха. (См. дополнение 1.)

1.7. Опыт. *Связанные колебания ножовочных полотен.* Зажмите два ножовочных полотна в тиски, оставив свободными концы длиной около 10 *см*. Одним из способов настройки их на одну частоту является укорачивание высовывающейся части одного полотна до тех пор, пока оно не будет колебаться с нужной частотой, и затем настройка другого полотна на эту частоту. Другим способом является «стробирование» каждого полотна светом от экрана телевизора как удобного стробоскопа (см. опыт 1.3). Когда колебания обоих полотен будут достаточно близки по тону, свяжите полотна резиновым жгутом. Возбудите колебания одного из полотен и наблюдайте биения между модами. Меняйте степень связи полотен, меняя положение резинового жгута вдоль полотен. Возникнут ли биения, если полотна не настроены (примерно) на одну частоту?

Приведем несколько других примеров, дающих возможность наблюдать прекрасные биения: 1) два одинаковых магнита, подвешенных над бруском железа так, что они могут колебаться (т. е. магниты связаны своими полями); 2) две бельевые веревки или струны, привязанные одним концом к одной и той же упругой стойке и независимо закрепленные другими концами; 3) две струны гитары, настроенные на один тон.

1.8. Опыт. *Связанные маятники.* Достаньте «пружину» и две банки консервов. Используйте банки как грузы маятников, подвесив их на веревках длиной 50 *см*. Соедините банки с помощью «пружины». Измерьте частоты двух продольных мод и частоту обмена энергией. (Начните наблюдение из положения, когда один маятник отклонен, а другой находится в положении равновесия.) Равна ли эта частота, измеренная вами, частоте биений $\nu_1 - \nu_2$? Зная частоту самой низкой моды, частоту биений и число используемых витков, вычислите величину, обратную жесткости «пружины» на один виток, т. е. величину K^{-1}/a.

В действительности наша система имеет четыре степени свободы. Кроме двух продольных степеней свободы, соответствующих модам, изученным выше, существуют две поперечные моды, и им соответствуют колебания маятников, перпендикулярные оси «пружины». Возбудите эти моды и измерьте их частоты. Сравните частоты продольных и поперечных мод. Объясните результат.

1.9. Предположим, что длина нити одного маятника равна 1 *м*, а сам маятник представляет собой алюминиевую сферу диаметром 5 *см*. Второй маятник имеет такую же длину подвеса, но сделан из медной сферы диаметром 5 *см*. Оба маятника начинают колебаться одновременно и с одинаковой амплитудой A. После пяти минут свободных колебаний амплитуда колебаний алюминиевого маятника равна половине начальной. Чему равна амплитуда медного маятника? Считайте, что трение определяется величиной скорости маятника и что мгновенная скорость потерь энергии пропорциональна квадрату скорости маятника. Покажите, что энергия рассеивается экспоненциально. (Покажите, что для любой другой скоростной зависимости, скажем v^4, экспоненциальный закон несправедлив.) Покажите, что для экспоненциального затухания среднее время затухания пропорционально массе маятника. Окончательный ответ для амплитуды колебаний медного маятника: $0{,}81\ A$.

1.10. Невесомая пружина подвешена к потолку. Длина пружины 20 *см*. К нижнему концу пружины прикреплена масса M. Будем поддерживать массу руками, так чтобы пружина оставалась расслабленной. Затем внезапно уберем руки. Масса и пружина будут совершать колебания. Пусть самое нижнее положение массы во время этих колебаний на 10 *см* ниже равновесного.

а) Чему равна частота колебаний? б) Чему равна скорость, когда масса находится на 5 *см* ниже первоначального положения равновесия?

Ответ. а) 2,2 *гц* б) 70 *см/сек*.

К первой массе добавляется вторая масса в 300 *г*. Таким образом, полная масса равна $M+300$ *г*. Когда такая система колеблется, частота ее колебаний равна половине частоты колебаний системы с массой M.

в) Чему равно M? г) Где будет новое положение равновесия?

Ответ. в) 100 *г*; г) на 15 *см* ниже старого положения.

1.11. Найдите моды и их частоты для системы из масс, связанных пружинами (см. рисунок). Массы скользят по поверхности без трения. В равновесии все пружины расслаблены. Считайте, что $M_1=M_2=M$.

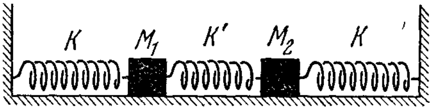

Рис. к задаче 1.11.

1.12. Опыт. *Биения от двух камертонов.* Возьмите два камертона с одинаковыми номинальными частотами, например камертоны C523,3 или A440. Ударьте камертоны один о другой на равном расстоянии от концов ножек. Расположите камертоны около одного уха, выбрав такие положения, при которых вы слышите биения. «Нагрузите» ножку одного камертона, надев на нее резиновое кольцо. Изменяя положение резинового кольца на ножке камертона, можно менять частоту биений.

Простые обеденные вилки могут быть хорошими камертонами. Постарайтесь найти две вилки, дающие примерно один и тот же тон и соответственно биения. Бокалы для вина иногда также дают чистые тона (обычно их колебания соответствуют сразу нескольким модам). Прислушиваясь к биениям, которые создаются колокольчиками (или двумя крышками от котелков), вы обнаружите, что отдельный колокольчик также является источником биений. Объяснение — в том, что он имеет две моды с близкими частотами. Ударяя по краю колокольчика, вы возбуждаете обе моды.

1.13. Опыт. *Нелинейность уха; комбинационные тона.* Для этого опыта нужны камертоны A440 и C523 (можно взять и другую пару) и тишина. Ударьте одним камертоном о другой. Поднесите их к уху поочередно. Затем, держа камертон A440 около уха, поднесите C523, но не фиксируйте внимание только на A440 или только на C523. Слушайте ноту примерно на большую терцию ниже A440. (При таком способе слушания — сперва C, затем A, затем оба камертона вместе — нужно сосредоточиться на низких тонах.) После некоторых попыток вы услышите ноту F, которая ниже A440. (Много людей не слышат этой ноты. Музыканты услышат ее сразу.) Чтобы облегчить задачу, попробуйте найти эти ноты на рояле. В результате вы услышите приятное F-мажорное трезвучие, т. е. F, A, C. Чтобы доказать, что за это явление ответственно ухо, а не мозг (т. е. доказать, что этот аккорд слышится не потому, что мозг воспринимает только мажорные трезвучия, вводя отсутствующую ноту аккорда F), поместите один камертон у одного уха и другой камертон — у другого. Если бы это явление было психологическим мы должны были бы слышать аккорд и в этом случае. Так ли это? Приведем по крайней мере часть объяснения.

Пусть $p(t)$ — звуковое давление снаружи барабанной перепонки, $q(t)$ — реакция барабанной перепонки (т. е. ее смещение); $q(t)$ может быть реакцией мембраны во внутреннем ухе — в этом мы точно не уверены. Мы хотим понять, почему реакция $q(t)$ нашего слухового аппарата *не подчиняется принципу суперпозиции*, т. е. почему реакция $q(t)$ содержит не только частоты ν_1 (A440) и ν_2 (C523), но также и третью частоту ν_3 ($\approx$F349). Объяснение заключается в нелинейности. (Мы уже знаем, что принцип суперпозиции справедлив для линейных систем, и ниже мы опять убедимся в этом.) Предположим, что реакция уха $q(t)$ является нелинейной функцией звукового давления $p(t)$:

$$q(t)=\alpha p(t)+\beta p^2(t)+\gamma p^3(t).$$

Пусть $p(t)$ — суперпозиция двух различных гармонических колебаний (образованных двумя камертонами). Для простоты мы считаем, что амплитуды колебаний одинаковы, а фазы равны нулю. Будем также считать, что в выбранной системе единиц амплитуды равны единице. Имеем

$$p(t) = \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t.$$

Реакция $q(t)$ барабанной перепонки равна

$$q(t) = \alpha[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t] + \beta[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t]^2 + \gamma[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t]^3.$$

Если β и γ равны нулю, то говорят, что реакция q линейна. (Она подчиняется в этом случае совершенно линейному закону Гука для пружины.) Линейная реакция $q(t)=\alpha(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)$ является суперпозицией гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2. (В этом случае вы не слышите F!) Член с коэффициентом β определяет квадратичную нелинейность, а следующий член — кубическую.

Мы хотим представить реакцию $q(t)$ в виде суперпозиции гармонических колебаний. Для этого нужно несколько тригонометрических тождеств, которые мы сейчас выведем. Пусть $f(x)\equiv\cos x$. Очевидно, что $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$, т. е.

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2}f(x+y) + \frac{1}{2}f(x-y).$$

Используем этот результат для вывода равенства (необходимого для анализа кубической нелинейности)

$$[f(x)f(y)]f(z) = \left[\frac{1}{2}f(x+y) + \frac{1}{2}f(x-y)\right]f(z) =$$
$$= \frac{1}{2}f(x+y)f(z) + \frac{1}{2}f(x-y)f(z) =$$
$$= \frac{1}{4}f(x+y+z) + \frac{1}{4}f(x+y-z) + \frac{1}{4}f(x-y+z) + \frac{1}{4}f(x-y-z).$$

Теперь займемся квадратичным членом реакции $q(t)$. Полагая $\theta_1\equiv\omega_1 t$, $\theta_2\equiv\omega_2 t$, имеем (для квадратичной нелинейности)

$$(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)^2 \equiv [f(\theta_1) + f(\theta_2)]^2 =$$
$$= [f(\theta_1)f(\theta_1)] + [2f(\theta_1)f(\theta_2)] + [f(\theta_2)f(\theta_2)] = \left[\frac{1}{2}f(\theta_1+\theta_1) + \frac{1}{2}f(\theta_1-\theta_1)\right] +$$
$$+ [f(\theta_1+\theta_2) + f(\theta_1-\theta_2)] + \left[\frac{1}{2}f(\theta_2+\theta_2) + \frac{1}{2}f(\theta_2-\theta_2)\right].$$

Таким образом, в квадратичный член реакции входят частоты $2\omega_1$, 0, $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$ и $2\omega_2$, которые называются *комбинационными тонами* или *комбинационными частотами*.

Кубический нелинейный член реакции имеет вид

$$(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)^3 = [f(\theta_1) + f(\theta_2)]^3 = f^3(\theta_1) + 3f^2(\theta_1)f(\theta_2) +$$
$$+ 3f(\theta_1)f^2(\theta_2) + f^3(\theta_2).$$

Используя равенство для $f(x)f(y)f(z)$, мы видим, что член $f^3(\theta_1)$ является суперпозицией гармонических колебаний с частотами $3\omega_1$ и ω_1; член $f^2(\theta_1)f(\theta_2)$ определяется суперпозицией частот $2\omega_1+\omega_2$, $2\omega_1-\omega_2$ и ω_2; член $f(\theta_1)f^2(\theta_2)$ является суперпозицией частот $2\omega_2+\omega_1$, $2\omega_2-\omega_1$ и ω_1; член $f^3(\theta_2)$ является суперпозицией частот $3\omega_2$ и ω_2. Таким образом, кубический член реакции является суперпозицией гармонических колебаний с частотами $3\omega_1$, ω_1, $2\omega_1\pm\omega_2$, $2\omega_2\pm\omega_1$, ω_2 и $3\omega_2$.

Вернемся теперь к нашему опыту. Простые арифметические выкладки показали нам, что F не связано с квадратичным нелинейным членом, а определяется вкладом кубического нелинейного члена, а именно частотой $2\omega_1-\omega_2$:

$$\nu_1 = \mathrm{A}440,\quad \nu_2 = \mathrm{C}523,\quad 2\nu_1 - \nu_2 = 880 - 523 = 357.$$

Для равномерно темперированного строя частота ноты F равна 349 *гц*. Таким образом, $2\nu_1-\nu_2$ достаточно близко к F.

Теперь рассмотрим интересный вопрос. Связана ли причина кубической нелинейности с барабанной перепонкой или же с резонирующей основной перепонкой?

Автору кажется, что кубическая нелинейность не связана с барабанной перепонкой, и вот по каким соображениям: отодвигая два камертона от уха, так что интенсивность, получаемая от каждого камертона, уменьшается, я все равно слышу ноту F. Если бы это происходило из-за нелинейной реакции барабанной перепонки, то громкость этой ноты падала бы с расстоянием значительно быстрее, чем громкость нот ν_1 и ν_2. Кроме того, должен был бы присутствовать нелинейный вклад с частотой $2\nu_2 - \nu_1 = 1046 - 440 = 606 \approx$ половина расстояния между D и $D_{\#}$, но эта нота не слышна. Все это еще не доказывает, что за явление ответственна основная перепонка, однако ставит под сомнение влияние барабанной перепонки. Могут ли здесь играть какую-либо роль нервные окончания основной перепонки, автору неизвестно. (Он обнаружил этот эффект случайно, работая над домашними опытами. Возможно, этот эффект хорошо известен и понятен.)

Оптические гармоники. Возможно образование оптических гармоник (а также суммы и разности частот, т. е. комбинационных частот). Для этого нужен незначительный нелинейный вклад в диэлектрическую постоянную прозрачного вещества. На обложке журнала «Scientific American» за июль 1963 г. помещена красивая фотография, на которой показан пучок красного света (с длиной волны 6940 Å), падающий на кристалл. С противоположной стороны кристалла выходит пучок синего света (с длиной волны 3470 Å). Уменьшение длины волны в два раза соответствует удвоению частоты. Причиной такого удвоения является квадратичная нелинейность. Посмотрите статью «Взаимодействие света со светом» [The Interaction of Light with Light, J. A. G i o r d m a i n e, Scientific American (April 1964).]

1.14. *Суперпозиция начальных условий дает суперпозицию соответствующих движений.* Предположим, что a и b — два связанных осциллятора. Рассмотрим три различных начальных условия:

1. a и b начинают движение с амплитудами 1 и —1 соответственно.
2. a и b начинают движение с амплитудами 1 и 1.
3. a и b начинают движение с амплитудами 2 и 0 соответственно.

Таким образом, начальные условия 3 являются суперпозицией начальных условий 1 и 2. Покажите, что движение в случае 3 является суперпозицией движений 1 и 2.

1.15. Докажите задачу 1.14 в общем случае, когда в начальные условия наряду со смещением входят скорости.

1.16. Докажите справедливость принципа суперпозиции для неоднородных линейных уравнений, приведенных после уравнения (36). Докажите, что принцип суперпозиции неприменим к нелинейным неоднородным уравнениям.

1.17. Напишите три уравнения для системы с тремя степенями свободы, аналогичные уравнениям (47) и (48). Покажите, что для определенной моды колебаний имеет место уравнение типа «определитель $\equiv 0$». Оно аналогично уравнению (56), но получается из определителя третьего порядка. Покажите, что это дает уравнение третьей степени относительно переменной ω^2. Поскольку кубическое уравнение имеет три решения, то существуют три моды. Рассмотрите случай N степеней свободы и докажите, что для такой системы существует N мод.

1.18. Опыт. *Биения от слабо связанных неидентичных струн гитары.* Настройте две самые низкие струны гитары на одинаковую частоту. Щипните одну струну и наблюдайте за второй. (Струны должны быть настроены на одну и ту же частоту как можно точнее. Показателем наиболее точной настройки является получение максимальных биений в этом опыте.) Теперь щипните другую струну. Передается ли энергия полностью от одной струны к другой в процессе биений? Можно ли добиться полной передачи энергии, улучшив настройку? Опишите, что вы наблюдаете. Как это объяснить? См. задачу 1.19.

1.19. *Неидентичные связанные маятники.* Рассмотрим два маятника, a и b, с одинаковой длиной нитей подвеса l, но с различными массами грузов M_a и M_b. Маятники связаны пружиной, прикрепленной к массам и имеющей коэффициент жесткости K. Покажите, что уравнения движения для малых колебаний имеют вид

$$M_a \frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -M_a \frac{g}{l}\psi_a + K(\psi_b - \psi_a), \qquad M_b \frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -M_b \frac{g}{l}\psi_b - K(\psi_b - \psi_a).$$

Решите эти уравнения для двух мод способом нормальных координат. Покажите, что $\psi_1 \equiv (M_a\psi_a + M_b\psi_b)/(M_a+M_b)$ и $\psi_2 = \psi_a - \psi_b$ являются нормальными координатами. Найдите частоты и конфигурации мод. Каков физический смысл координат ψ_1 и ψ_2? Найдите суперпозицию двух мод со следующими начальными условиями: при $t=0$ оба маятника имеют нулевую скорость; маятник a имеет амплитуду A, и амплитуда маятника b равна нулю. Пусть E равно полной энергии, которую имеет маятник a в момент $t=0$. Найдите выражения для $E_a(t)$ и $E_b(t)$. Предположим, что связь слабая. Будет ли энергия маятника a полностью передаваться маятнику b в течение цикла биений? Возможно ли, что энергия передается полностью, если первоначально вся энергия была у легкого маятника, и не передается полностью в противоположном случае?

Ответ.

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + K\left(\frac{1}{M_a} + \frac{1}{M_b}\right);$$

$$\psi_a = A\left(\frac{M_a}{M}\cos\omega_1 t + \frac{M_b}{M}\cos\omega_2 t\right), \quad \psi_b = A\,\frac{M_a}{M}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t),$$

где $M = M_a + M_b$.

Введя частоты $\omega_{\text{мод}} = {}^1/_2(\omega_2 - \omega_1)$ и $\omega_{\text{ср}} = {}^1/_2(\omega_2 + \omega_1)$, можно написать

$$\psi_a = (A\cos\omega_{\text{мод}} t)\cos\omega_{\text{ср}} t + \left(A\,\frac{M_a - M_b}{M}\sin\omega_{\text{мод}} t\right)\sin\omega_{\text{ср}} t,$$

$$\psi_b = \left(2A\,\frac{M_a}{M}\sin\omega_{\text{мод}} t\right)\sin\omega_{\text{ср}} t.$$

Энергию каждого маятника легко найти, если связь между маятниками невелика. В этом случае можно пренебречь изменениями $\sin\omega_{\text{мод}} t$ или $\cos\omega_{\text{мод}} t$ за один цикл быстрых колебаний, происходящих с частотой $\omega_{\text{ср}}$, так как $\omega_{\text{мод}} \ll \omega_{\text{ср}}$. Мы также пренебрегаем энергией, запасенной в любой момент времени в пружине. Таким образом,

$$E_b = E\left(\frac{2M_aM_b}{M^2}\right)[1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t],$$

$$E_a = E\left[\frac{M_a^2 + M_b^2 + 2M_aM_b\cos(\omega_2 - \omega_1)t}{M^2}\right].$$

Итак, энергия маятника a (т. е. маятника, у которого в момент времени $t=0$ была вся энергия) изменяется синусоидально с частотой биений, колеблясь между максимальным значением E и минимальным значением $[(M_a - M_b)/M]^2E$.

Энергия маятника b колеблется с частотой биений между минимальным нулевым значением и максимальным значением $(4M_aM_b/M^2)E$. Полная энергия $E_a + E_b$ постоянна (так как мы пренебрегли затуханием). Теперь вспомните домашний опыт 1.18. Объясните, почему при неравных массах не происходит полной передачи энергии. (Указание. Рассмотрите два предельных случая: 1. $M_a \gg M_b$. 2. $M_a \ll M_b$.)

1.20. *Поперечные колебания двух связанных масс.* Используя либо приближение «пружины», либо приближение малых колебаний, найдите два связанных уравнения движения для поперечных смещений ψ_a и ψ_b (см. рис. 1.11).

а) Используйте описанный в тексте главы аналитический метод нахождения частот и отношений амплитуд для обеих нормальных мод.

б) Найдите линейную комбинацию координат ψ_a и ψ_b, которая дает несвязанные уравнения, т. е. найдите нормальные координаты. Найдите частоты и отношения амплитуд для обеих мод.

Ответ. См. уравнения (70) и (71).

1.21. *Колебания в двух связанных LC-цепях.* Найдите две нормальные моды колебаний для связанных цепей, показанных на рис. 1.12, когда уравнения движения имеют вид (77) и (78).

а) Воспользуйтесь аналитическим методом.

б) Используйте метод нахождения нормальных координат.

Ответ. См. уравнение (79).

1.22. Тяжелый предмет лежит на резиновой подушке (которая применяется как амортизатор), сжимая ее на 1 *см*. Если ударить по предмету в вертикальном направлении, он начнет колебаться. (Колебания будут затухать; мы пренебрегаем затуханием.) Оцените частоту колебаний. (Указание. Считайте, что подушка ведет себя как пружина, подчиняющаяся закону Гука.)

Ответ. Около 5 *гц*.

1.23. *Продольные колебания двух связанных масс.* Система показана на рис. 1.9. Уравнения (62) и (63) являются уравнениями движения системы. Используйте аналитический метод, выраженный уравнениями (47)—(59), для нахождения мод. Вы должны не просто подставить ваши данные в эти уравнения, а выполнить, «не подглядывая», всю последовательность действий.

Ответ. См. уравнения (60) и (61).

1.24. Опыт. *Мода «омывания» в сосуде с водой.* Первая мода колебаний в замкнутом объеме жидкости может быть названа модой «омывания»*). Каждый, кто когда-либо пытался нести полный сосуд с водой без расплескивания, знает, что эту моду легко возбудить.

Наполните прямоугольный сосуд водой и слегка толкните его. Еще лучше поместить сосуд на горизонтальную поверхность, наполнить его до краев и затем долить так, чтобы вода «вздулась» (поднялась) над краями. Слегка толкните сосуд. После того, как более высокие моды затухнут, можно наблюдать моду «омывания», которая затухает очень медленно. (Это — гравитационная мода, несмотря на то что мы используем поверхностное натяжение, чтобы удержать воду «над стенками»; этим затухание сводится к минимуму.) Поверхность воды остается практически плоской (после того как более высокие моды затухнут). Предположим, что мода все время плоская: горизонтальная — в положении равновесия и наклонная — в крайних положениях. Пусть ось x совпадает с горизонтальным направлением, а ось y направлена вверх. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — горизонтальная и вертикальная координаты центра тяжести воды в сосуде с равновесными значениями $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$. Найдите зависимость $(\bar{y}-\bar{y}_0)$ от $(\bar{x}-\bar{x}_0)$. (Удобной переменной может служить уровень воды на одном конце сосуда, отсчитанный от равновесного уровня.) Увеличение потенциальной энергии всего объема воды равно $mg\,(\bar{y}-\bar{y}_0)$. Вы обнаружите, что $(\bar{y}-\bar{y}_0)$ пропорционально $(\bar{x}-\bar{x}_0)^2$. Таким образом, потенциальная энергия центра тяжести, подобно потенциальной энергии гармонического осциллятора, пропорциональна квадрату смещения от равновесного положения. Используйте второй закон Ньютона, предполагая, что вся масса воды m сосредоточена в центре тяжести. Найдите формулу для частоты.

Ответ. $\omega^2=3gh_0/L^2$, где h_0 — равновесная глубина воды, $g=980$ *см/сек* и L равно половине длины сосуда вдоль направления движения волны, т. е. вдоль x. Проверьте эту формулу, т. е. измерьте ω, h_0 и L для вашего сосуда и сравните полученные значения с формулой.

1.25. *Сейши.* Как известно, средняя глубина Женевского озера около 150 *м*, а длина порядка 60 *км* (включая узкую западную часть озера). Аппроксимируя озеро прямоугольным сосудом, мы можем использовать формулу для ω^2, полученную в домашнем опыте 1.24. Какой период сейш (т. е. мод «омывания») дает эта формула при условии, что сейши распространяются вдоль длинной стороны озера? (Наблюдаемый период — порядка часа.) Вероятной причиной образования сейш является резкое различие атмосферного давления над разными участками озера. Наблюдаемые амплитуды достигают полутора метров.

В июне 1954 г. сейша с амплитудой около 3 *м*, возникшая на озере Мичиган, смыла рыболовов, ловивших рыбу на пирсе.

В соответствии с сообщением в «Time» (17 ноября 1967 г.), ударные волны от сильного землетрясения на Аляске в «страстную» пятницу 1964 г. вызвали образование сейш на реках, озерах и в гаванях вдоль береговой линии США, а также привели к выплескиванию воды из плавательных бассейнов.

---

*) Здесь и дальше этим условным термином переведено выражение «sloshing mode in a pan of water». (*Прим. ред.*)