ГЛАВА 2

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

2.1. Введение

В главе 1 мы рассмотрели поведение систем с одной или двумя степенями свободы. Здесь мы будем изучать системы, имеющие N степеней свободы, причем N может быть очень большим и даже «бесконечно большим» числом.

У системы с N степенями свободы имеется только N мод (см. задачу 1.17). Каждая мода обладает своей собственной частотой и «формой», определяемой отношением амплитуд A: B: C: D: и т. д. (эти амплитуды соответствуют степеням свободы a, b, c, d и т. д.). Все движущиеся элементы при данной моде колебаний одновременно проходят положение равновесия, т. е. движение, соответствующее каждой степени свободы, происходит с одинаковой фазовой постоянной. Таким образом, у каждой моды имеется своя фазовая постоянная, которая определяется начальными условиями. Так как для данной моды колебания всех степеней свободы происходят с одинаковой частотой ω, то каждому движущемуся элементу соответствует одинаковая величина восстанавливающей силы, приходящейся на единицу смещения и единицу массы, равная ω^2.

Предположим, что мы имеем систему с четырьмя степенями свободы a, b, c, d. У нее существуют четыре моды колебаний. Предположим, что для моды 1 отношения амплитуд равны

$$A:B:C:D = 1:0:-2:7.$$

Тогда смещения по степеням свободы a, b, c и d (если возбуждена только мода 1) имеют вид

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \psi_b = 0, \quad \psi_c = -2\psi_a, \quad \psi_d = 7\psi_a,$$

где A_1 и φ_1 определяются начальными условиями.

Если система состоит из очень большого числа движущихся элементов, заключенных в ограниченном объеме, то среднее расстояние между соседними элементами становится очень малым. В пределе число элементов можно считать бесконечно большим, при этом расстояние между соседними элементами будет стремиться к нулю. В этом случае система ведет себя так, как если бы она была «непрерывной». Такое утверждение подразумевает, что движение соседних элементов системы почти одинаково, т. е. что смещение всех движущихся элементов в окрестности точки x может быть описано вектором смещения $\psi(x, y, z, t)$, где ψ — непрерывная функция координат x, y, z и времени t. Эта функция заменяет описание, задающее смещение $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$ и т. д. отдельных элементов. Мы говорим в этом случае, что имеем дело с *волнами*.

Стоячие волны являются нормальными модами. Моды непрерывных систем называются *стоячими волнами*, или *нормальными модами*, или просто *модами*. В соответствии с тем, что было сказано выше, непрерывная система имеет бесконечное число независимых движущихся элементов, несмотря на то что занимает конечный объем. Поэтому она обладает бесконечно большим числом степеней свободы и соответственно бесконечным числом мод. Это не может быть абсолютно верным для реальных материальных систем. Один литр воздуха имеет не бесконечно большое число движущихся элементов, а только $2{,}7 \cdot 10^{22}$ молекул, у каждой из которых три степени свободы (движения вдоль x-, y- и z-направлений). Поэтому 1 *л* воздуха, заключенный в бутылку, не имеет бесконечно большого числа мод колебаний: это число не может быть больше, чем $\sim 8{,}1 \cdot 10^{22}$. Каждый, кто пытался дуть в бутылку или играть на флейте, заметил, что легко возбудить лишь несколько первых мод. (В дальнейшем мы будем нумеровать моды в порядке возрастания частоты. Таким образом, моде 1 соответствует самая низкая частота, моде 2 — следующая, более высокая, частота и т. д.) На практике мы будем иметь дело с небольшим числом первых мод (или в крайнем случае с несколькими десятками или тысячами мод). Мы увидим, что первые моды ведут себя так, как если бы система была непрерывной.

Общее движение системы может быть описано как суперпозиция всех ее мод с амплитудами и фазовыми константами, определяемыми из начальных условий. В этом общем случае поведение колеблющейся системы будет казаться очень сложным, так как в сложном движении, являющемся суперпозицией многих мод, очень трудно различать отдельно каждую моду.

Моды колебаний струны с грузами. Начнем с изучения поперечных колебаний струны с грузами. Под «струной» мы подразумеваем пружину. Предположим, что мы имеем линейные (т. е. подчиняющиеся закону Гука) невесомые пружины, на которых расположены точечные массы M (грузы). (На рисунках будем изображать пружины прямой, а не винтовой линией.)

На рис. 2.1 представлена последовательность таких струн с грузами. Для первой системы $N=1$ (одна степень свободы), для следующей $N=2$ и т. д. Для каждой системы на рис. 2.1 показаны конфигурации, соответствующие нормальным модам. Позже мы получим выражения, характеризующие конфигурацию и частоту каждой моды.

Уже сейчас легко понять (поверив, что показанные конфигурации совпадают с конфигурациями мод), что мы правильно расположили конфигурации в порядке возрастания частоты мод. Действительно, при заданном смещении данного груза с увеличением номера моды возрастает величина угла между струной и горизонтальной осью, отвечающей состоянию равновесия. Увеличение угла означает

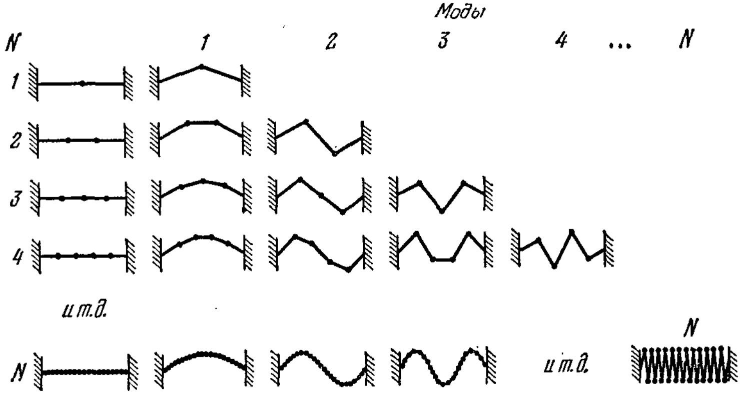

Рис. 2.1. Моды поперечных колебаний нагруженной струны.
Струна с N грузами имеет N мод. В m-й моде положение равновесия пересекается струной m — 1 раз, и мода состоит из m полуволн. Мода с самой большой частотой соответствует показанной на рисунке кривой с «зигзагами».

увеличение возвращающей силы, приходящейся на единицу смещения и единицу массы для каждого заданного груза, а следовательно, возрастание частоты моды.

Другим очевидным фактом является то, что последовательность предполагаемых мод образует именно N конфигураций: число узловых точек (точки, в которых пружина пересекает горизонтальную ось, исключая концевые точки) равно нулю в первой моде, вторая мода имеет одну узловую точку и т. д. Самая высокая мода имеет максимально возможное число узловых точек, равное $N—1$.

2.2. Моды поперечных колебаний непрерывной струны

Обсудим случай, когда N велико, например $N=10^6$ или такого порядка. Тогда для первых мод (скажем, первых нескольких тысяч) между двумя соседними узлами окажется очень много грузов. Смещение будет медленно меняться от одного груза к другому. (Мы не будем рассматривать самые высокие моды, так как в этих модах между соседними узловыми точками окажется всего лишь несколько грузов. В этом случае струна имеет большое число «зигзагов» и описание смещения с помощью непрерывной функции $\psi(x, y, z, t)$ перестает быть хорошим приближением.) В соответствии со сказанным выше мы не будем описывать мгновенную конфигурацию перечнем смещений $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$, $\psi_c(t)$, $\psi_d(t)$ и т. д. каждого