Уже сейчас легко понять (поверив, что показанные конфигурации совпадают с конфигурациями мод), что мы правильно расположили конфигурации в порядке возрастания частоты мод. Действительно, при заданном смещении данного груза с увеличением номера моды возрастает величина угла между струной и горизонтальной осью, отвечающей состоянию равновесия. Увеличение угла означает

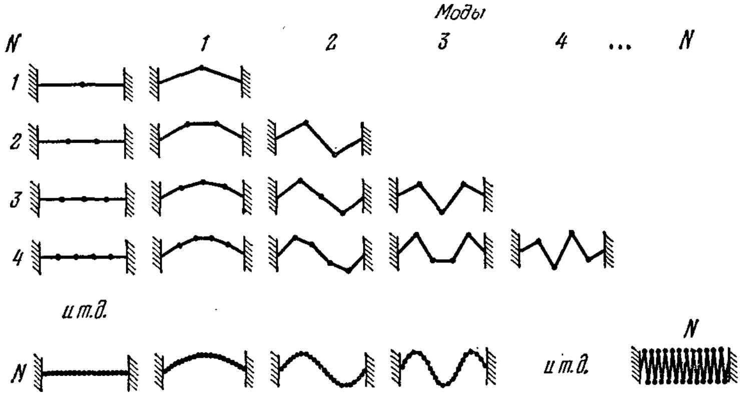

Рис. 2.1. Моды поперечных колебаний нагруженной струны.
Струна с N грузами имеет N мод. В m-й моде положение равновесия пересекается струной m — 1 раз, и мода состоит из m полуволн. Мода с самой большой частотой соответствует показанной на рисунке кривой с «зигзагами».

увеличение возвращающей силы, приходящейся на единицу смещения и единицу массы для каждого заданного груза, а следовательно, возрастание частоты моды.

Другим очевидным фактом является то, что последовательность предполагаемых мод образует именно N конфигураций: число узловых точек (точки, в которых пружина пересекает горизонтальную ось, исключая концевые точки) равно нулю в первой моде, вторая мода имеет одну узловую точку и т. д. Самая высокая мода имеет максимально возможное число узловых точек, равное $N—1$.

2.2. Моды поперечных колебаний непрерывной струны

Обсудим случай, когда N велико, например $N=10^6$ или такого порядка. Тогда для первых мод (скажем, первых нескольких тысяч) между двумя соседними узлами окажется очень много грузов. Смещение будет медленно меняться от одного груза к другому. (Мы не будем рассматривать самые высокие моды, так как в этих модах между соседними узловыми точками окажется всего лишь несколько грузов. В этом случае струна имеет большое число «зигзагов» и описание смещения с помощью непрерывной функции $\psi(x, y, z, t)$ перестает быть хорошим приближением.) В соответствии со сказанным выше мы не будем описывать мгновенную конфигурацию перечнем смещений $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$, $\psi_c(t)$, $\psi_d(t)$ и т. д. каждого груза. Вместо этого будем считать, что все частицы в окрестности точки (x, y, z), отвечающей положению равновесия (окрестность может быть бесконечно малым кубом с ребрами Δx, Δy и Δz), имеют один и тот же мгновенный вектор смещения $\boldsymbol{\psi}(x, y, z, t)$:

$$\boldsymbol{\psi}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{x}}\psi_x(x, y, z, t) + \hat{\mathbf{y}}\psi_y(x, y, z, t) + \hat{\mathbf{z}}\psi_z(x, y, z, t). \quad (1)$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы, а ψ_x, ψ_y и ψ_z — компоненты вектора смещения $\boldsymbol{\psi}$. Важно понимать, что координаты x, y, z представляют собой *равновесное* положение частиц. Таким образом, x, y и z не зависят от времени.

Продольное и поперечное смещения. Выражение (1) имеет значительно более общую форму, чем нужно для изучения колебаний струны. Предположим, что в состоянии равновесия струна растянута вдоль оси z. Тогда координата z дает положение равновесия каждого груза и выражение (1) может быть записано в более простом виде:

$$\boldsymbol{\psi}(z, t) = \hat{\mathbf{x}}\psi_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}\psi_y(z, t) + \hat{\mathbf{z}}\psi_z(z, t). \quad (2)$$

Смещения вдоль оси z называются *продольными*, а вдоль осей x и y — *поперечными*. Здесь мы рассмотрим только поперечные колебания струны. Поэтому мы положим функцию ψ_z равной нулю:

$$\boldsymbol{\psi}(z, t) = \hat{\mathbf{x}}\psi_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}\psi_y(z, t). \quad (3)$$

Линейная поляризация. Для большей простоты положим, что колебания происходят только вдоль оси $\hat{\mathbf{x}}$ (т. е. $\psi_y \equiv 0$). В этом случае говорят, что колебания *линейно-поляризованы* вдоль $\hat{\mathbf{x}}$. (В главе 8 мы будем изучать общий случай поляризации.) Опустив единичный вектор $\hat{\mathbf{x}}$ и индекс в ψ_x, мы можем написать:

$\psi(z, t) =$ мгновенное поперечное смещение частиц, имеющих равновесное положение z. (4)

Теперь рассмотрим очень малый элемент непрерывной струны. В равновесном состоянии он занимает интервал длиной Δz с центром в z. Масса единицы длины, т. е. отношение $\Delta M/\Delta z$, называется *линейной* (или *погонной*) *плотностью* ρ_0:

$$\Delta M = \rho_0 \Delta z. \quad (5)$$

Предположим, что линейная плотность не меняется вдоль всей струны. Предположим также, что натяжение струны в положении равновесия T_0 также одинаково по всей ее длине.

В общем случае, когда струна не находится в состоянии равновесия, среднее смещение нашего сегмента равно $\psi(z, t)$ (рис. 2.2). Сегмент будет обладать некоторой кривизной, так как углы θ_1 и θ_2 не равны (см. рис. 2.2). При этом длина сегмента уже не равна Δz, поэтому и натяжение не равно больше T_0. Найдем силу F_x, действующую на сегмент. На левом конце на сегмент действует сила $T_1 \sin\theta_1$, направленная вниз. Сила $T_2 \sin\theta_2$, действующая на правый конец сегмента, направлена вверх. Полная сила, действующая на сегмент, равна

$$F_x(t) = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1. \qquad (6)$$

Мы хотим выразить $F_x(t)$ через $\psi(z,t)$ и ее пространственную производную:

$$\frac{\partial\psi(z,\ t)}{\partial z} = \text{наклон кривой в точке } z \text{ в момент времени } t. \qquad (7)$$

В соответствии с рис. 2.2 наклон струны в точке z_1 равен $\operatorname{tg}\theta_1$, а наклон в точке z_2 равен $\operatorname{tg}\theta_2$. Горизонтальные компоненты натяжения струны в точках z_1 и z_2 равны соответственно $T_1\cos\theta_1$ и $T_2\cos\theta_2$. Наша цель — получить *линейное* дифференциальное уравнение движения. Мы будем работать либо с приближением «пружины», либо с приближением малых колебаний. В случае приближения «пружины» T больше T_0 в $1/\cos\theta$ раз, потому что сегмент больше Δz во столько же раз: $T\cos\theta = T_0$. В случае малых колебаний мы пренебрегаем возрастанием длины сегмента и принимаем $\cos\theta = 1$. Таким образом, и в этом случае мы имеем $T\cos\theta = T_0$. Уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} F_x(t) &= T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 = \\ &= T_2\cos\theta_2 \operatorname{tg}\theta_2 - T_1\cos\theta_1\operatorname{tg}\theta_1 = \\ &= T_0\operatorname{tg}\theta_2 - T_0\operatorname{tg}\theta_1 = \\ &= T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_2 - T_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1. \end{aligned} \qquad (8)$$

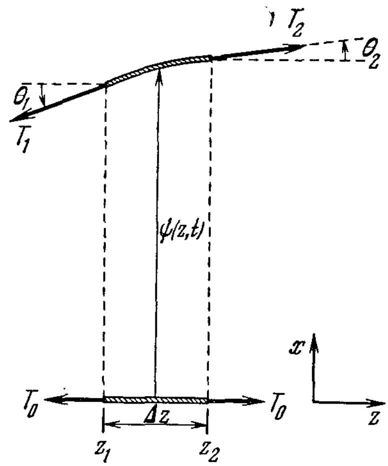

Рис. 2.2. Поперечные колебания непрерывной струны.

Внизу показано равновесное положение бесконечно малого отрезка струны длиной Δz. Наверху показано положение этого отрезка и его конфигурация в общем случае.

Теперь рассмотрим функцию $f(x)$, которую определим так:

$$f(z) = \frac{\partial\psi(z,\ t)}{\partial z}. \qquad (9)$$

Мы не внесли время t в аргумент формулы, так как считаем t константой. Разложим $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_1, а затем положим $z = z_2$ [см. приложение I, уравнение (3)]:

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1)\left(\frac{df}{dz}\right)_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2\left(\frac{d^2 f}{dz^2}\right)_1 + \ldots, \qquad (10)$$

где $z_2 - z_1 = \Delta z$ в соответствии с рис. 2.2. Теперь перейдем к пределу, когда Δz настолько мало, что в уравнении (10) можно пренебречь квадратичным членом и всеми членами более высокого порядка.

Получим

$$f(z_2)-f(z_1)=\Delta z\left(\frac{df}{dz}\right)_1=\Delta z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\psi(z,\,t)}{\partial z}\right)=\Delta z\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi(z,\,t)}{\partial z}\right)=$$
$$=\Delta z\,\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial z^2}\,. \qquad (11)$$

Заметим, что начиная со второго равенства в (11) мы опускали индекс 1. Эта справедливо, потому что мы пренебрегли производными более высокого порядка в разложении Тейлора (10), и поэтому производная может вычисляться в любом месте интервала Δz. Заметим также, что поскольку мы пишем $\psi(z, t)$, то следует вновь ввести символ частной производной.

Используем теперь уравнения (9), (11) и (8), чтобы получить выражение для полной силы, действующей на сегмент:

$$F_x(t)=T_0\,\Delta z\,\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial z^2}\,. \qquad (12)$$

По второму закону Ньютона эта сила равна произведению массы сегмента ΔM на его ускорение. Скорость и ускорение сегмента с равновесным положением в точке z можно следующим образом выразить через $\psi(z, t)$ и ее производные:

$$\left.\begin{aligned}&\psi(z,\,t)=\text{смещение},\\&\frac{\partial\psi(z,\,t)}{\partial t}=\text{скорость},\\&\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial t^2}=\text{ускорение}.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Таким образом, второй закон Ньютона (вспомним, что $\Delta M=\rho_0\Delta z$) дает

$$\rho_0\,\Delta z\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=F_x=T_0\,\Delta z\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,,$$

т. е.

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial t^2}=\frac{T_0}{\rho_0}\,\frac{\partial^2\psi(z,\,t)}{\partial z^2}\,.} \qquad (14)$$

Классическое волновое уравнение. Уравнение (14) — весьма знаменитое уравнение второго порядка в частных производных. Оно называется *классическим волновым уравнением.* Мы будем часто с ним встречаться и познакомимся со многими свойствами его решений и с физическими ситуациями, которые описываются этим уравнением. (Конечно, положительная константа T_0/ρ_0 характерна для задачи о струне. В других физических задачах, которые приводят к волновому уравнению, появляются другие положительные константы.)

Стоячие волны. Попытаемся найти нормальные моды непрерывной струны, которые представляют собой стоячие волны. *Предположим,* что мы возбудили какую-то моду и, следовательно, все части струны совершают гармоническое движение с одинаковой угловой частотой ω и с одинаковой фазовой постоянной φ. Тогда функция $\psi(z, t)$, представляющая собой смещение частиц, которые в равновесии находятся в z, должна иметь одну и ту же временну́ю зависимость вида $\cos(\omega t+\varphi)$ для всех «движущихся элементов», т. е. для любых z. Как обычно, фазовая постоянная соответствует «моменту включения» моды. «Геометрия» моды зависит от числа степеней свободы a, b, c и т. д. и определяется отношением амплитуд колебаний A, B, C и т. д., соответствующих этим степеням.

В случае непрерывной струны, когда степеней свободы бесконечно много и они определяются параметром z, амплитуда колебаний для различных степеней свободы (т. е. «геометрия» моды) может быть представлена в виде непрерывной функции от z, которую мы обозначим $A(z)$. Функция $A(z)$ характеризует моду; каждой моде соответствует определенная функция $A(z)$. Теперь мы можем написать *общее выражение для стоячей волны*:

$$\psi(z, t) = A(z)\cos(\omega t+\varphi). \tag{15}$$

Из уравнения (15) получим выражение для ускорения:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi = -\omega^2 A(z)\cos(\omega t+\varphi). \tag{16}$$

Вторая частная производная по z для уравнения (15) равна

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2[A(z)\cos(\omega t+\varphi)]}{\partial z^2} = \cos(\omega t+\varphi)\frac{d^2A(z)}{dz^2}. \tag{17}$$

В правой части стоит знак обычной производной, так как $A(z)$ не зависит от времени. Подставляя (16) и (17) в (14) и сокращая на $\cos(\omega t+\psi)$, получим

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = -\omega^2\frac{\rho_0}{T_0}A(z). \tag{18}$$

Уравнение (18) определяет геометрическую форму моды. Поскольку каждой моде соответствует своя частота ω, а в уравнение (18) входит ω^2, то, как и ожидалось, каждая мода имеет свою форму.

Уравнение (18) совпадает с уравнением гармонического осциллятора, если в последнем заменить время на координату. В общем случае решение уравнения для такого «гармонического осциллятора в пространстве» можно записать в виде

$$A(z) = A\sin\left(2\pi\frac{z}{\lambda}\right) + B\cos\left(2\pi\frac{z}{\lambda}\right), \tag{19}$$

где λ представляет собой расстояние, на котором совершается одно полное колебание. Величина λ называется *длиной волны*. Этот параметр для колебаний в пространстве имеет такой же смысл, что и период T для колебаний во времени. Длина волны λ измеряется в сантиметрах на цикл (т. е. на цикл пространственных колебаний по z) или просто в сантиметрах.

Продифференцируем (19) по z дважды, получим

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A(z). \tag{20}$$

Сравнивая (18) и (20), находим

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2\left(\frac{\rho_0}{T_0}\right) = (2\pi\nu)^2\frac{\rho_0}{T_0}, \tag{21}$$

т. е.

$$\boxed{\lambda\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \equiv v_0 = \text{const.}} \tag{22}$$

Скорость волн в струне. Уравнение (22) связывает между собой длину волны и частоту для поперечных стоячих волн в непрерывной однородной струне. Постоянная $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ имеет размерность скорости, поскольку $\lambda\nu$ имеет размерность [длина/время]. Скорость $v_0 \equiv (T_0/\rho_0)^{1/2}$ носит название «фазовой скорости бегущих волн» для этой системы. (Мы будем изучать бегущие волны в главе 4.) При изучении стоячих волн мы не нуждаемся в понятии фазовой скорости, так как стоячие волны никуда не «бегут». Они «стоят и колеблются», как большой «размазанный» гармонический осциллятор. В этой главе мы не будем называть отношение $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ скоростью, так как хотим, чтобы читатель привык к представлению о стоячих волнах.

Общее решение для смещения $\psi(z, t)$ получим, объединив уравнения (15) и (19):

$$\psi(z, t) = \cos(\omega t + \varphi)\,[A\sin(2\pi z/\lambda) + B\cos(2\pi z/\lambda)]. \tag{23}$$

Граничные условия. Уравнение (23) имеет *слишком* общий вид. В нем никак не отражены граничные условия. Наша струна закреплена на концах, а в решении нет информации, которая указывала бы на это. Посмотрим, как ввести такую информацию. Пусть длина струны L. Выберем систему координат таким образом, чтобы левый конец струны находился в точке $z=0$, тогда правому концу соответствует $z=L$. Рассмотрим координату $z=0$. Струна здесь закреплена, и $\psi(0, t)$ должно равняться нулю для всех t. Отсюда следует, что $B=0$, так как для любого момента времени t

$$\psi(0, t) = \cos(\omega t + \varphi)\,[0 + B] = 0. \tag{24}$$

Таким образом, имеем

$$\psi(z, t) = A\cos(\omega t + \varphi)\sin\frac{2\pi z}{\lambda}. \tag{25}$$

Другое граничное условие заключается в том, что струна фиксирована в точке $z=L$, так что $\psi(L, t)$ равно нулю для всех t. Этому граничному условию можно удовлетворить, положив в уравнении (25) $A=0$, но такое решение не представляет интереса, так как соответствует покоящейся струне. Единственная возможность удовлетворить граничному условию в точке $z=L$ заключается в том, чтобы положить

$$\sin\frac{2\pi L}{\lambda}=0. \tag{26}$$

Длины волн λ, для которых это справедливо, должны удовлетворять уравнению

$$\frac{2\pi L}{\lambda}=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ \ldots \tag{27}$$

(Почему мы исключили случай $2\pi L/\lambda=0$)? Написанная последовательность возможных длин волн, удовлетворяющих граничным условиям, дает все возможные моды струны. Пронумеруем эту последовательность, начиная с первого члена, которому присвоим номер 1. В соответствии с (27) получаем следующие длины волн возможных мод:

$$\lambda_1=2L,\ \lambda_2=\frac{1}{2}\lambda_1,\ \lambda_3=\frac{1}{3}\lambda_1,\ \lambda_4=\frac{1}{4}\lambda_1,\ \ldots \tag{28}$$

Гармонические отношения частот. Чтобы найти соответствующие частоты, мы должны использовать уравнение (22). Получаем

$$\nu_1=v_0/\lambda_1,\ \nu_2=2\nu_1,\ \nu_3=3\nu_1,\ \nu_4=4\nu_1,\ \ldots \tag{29}$$

Частоты $2\nu_1$, $3\nu_1$ и т. д. называются второй, третьей и т. д. *гармониками основной* частоты ν_1. Утверждение, что частоты ν_2, ν_3 и т. д. являются *гармониками* частоты ν_1, соответствующей первой моде, следует из нашего предположения о совершенно однородной и упругой струне. Частоты мод большинства реальных физических систем не образуют такой гармонической последовательности. Например, для струны с неоднородной плотностью частоты мод не являются гармониками основной частоты и могут принимать такие значения, как, например, $\nu_2=2{,}78\nu_1$, $\nu_3=4{,}62\nu_1$ и т. д. У струны пианино или скрипки частоты мод образуют лишь приближенно гармоническую последовательность. Причина в том, что струны не абсолютно упруги. (В задаче 2.7 рассмотрено влияние неоднородной плотности струны на «гармонические» отношения частот.)

Моды нашей струны показаны на рис. 2.3. Равновесная конфигурация отвечает отсутствующему первому члену, $2\pi L/\lambda=0$, в последовательности (27). Соответствующая частота равна нулю. Здесь нет никакого движения, и это равновесное состояние не называется модой.

Волновое число. Величина, обратная длине волны, называется *волновым числом* σ. Оно измеряется в циклах на сантиметр или, чаще, в «обратных сантиметрах». Этот параметр характеризует колебания в пространстве, аналогично тому как частота ν характеризует колебания во времени.

$$\sigma=1/\lambda=\text{волновое число } (\mathit{см}^{-1}). \tag{30}$$

Волновое число, умноженное на 2π, можно назвать *угловым волновым числом* k. Его измеряют в *рад/см*. Величина k характеризует колебания в пространстве, как угловая частота ω — колебания во времени

$$k = 2\pi/\lambda = \text{угловое волновое число (}\textit{рад/см}\text{)}. \qquad (31)$$

Покажем, как использовать эти величины для записи уравнений стоячих волн:

$$\psi(z, t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{z}{\lambda} = A \sin 2\pi\nu t \sin 2\pi\sigma z =$$

$$= A \sin \omega t \sin kz. \qquad (32)$$

В качестве другого примера перепишем следующим образом

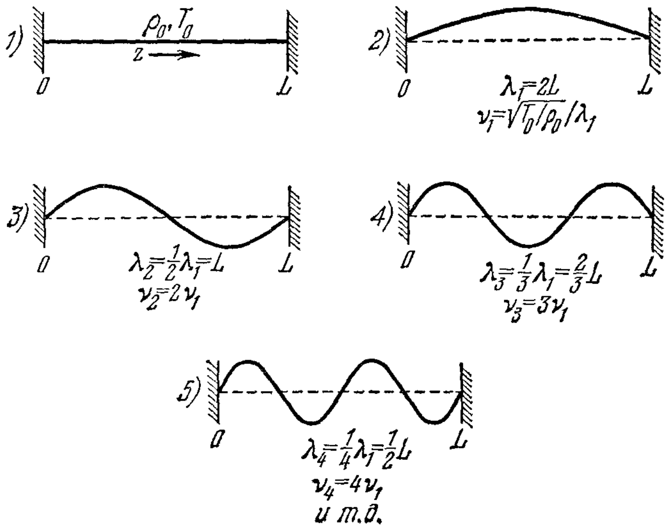

Рис. 2.3. Моды колебаний непрерывной однородной струны с фиксированными концами.

последовательность нормальных мод, определяемую уравнениями (27) — (29):

$$k_1 L = \pi \textit{ рад}, \quad k_2 L = 2\pi \textit{ рад}, \quad k_3 L = 3\pi \textit{ рад} \text{ и т. д.} \qquad (33)$$

или

$$\sigma_1 L = \frac{1}{2} \text{ цикла}, \quad \sigma_2 L = 1 \text{ цикл}, \quad \sigma_3 L = \frac{3}{2} \text{ цикла и т. д.} \qquad (34)$$

Дисперсионное соотношение. Равенство (22) связывает частоту и длину волны для нормальных мод однородной упругой струны:

$$\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \sigma.$$

Умножая его на 2π, получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k. \qquad (35)$$

Равенство (35) дает соотношение между частотой и волновым числом нормальных мод струны. (Заметьте, что мы опустили прилагательное «угловой». Так обычно и поступают, если обозначения и размерность позволяют избежать неясности.) Выражение (35), определяющее ω как функцию k, называется *дисперсионным соотношением* *). Это удобный способ описания волновых свойств системы.

Закон дисперсии для реальной струны пианино. Дисперсионное соотношение (35) очень просто. Позже мы увидим примеры более сложных дисперсионных соотношений, когда величина $\lambda\nu=\omega/k$ уже не константа, а зависит от длины волны. Например, для струны пианино дисперсионное соотношение может быть приближенно выражено формулой

$$\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{T_0}{\rho_0}+\alpha k^2, \qquad (36)$$

где α — небольшая положительная константа, которая равна нулю для совершенно упругой струны. [В этом случае соотношение (36) переходит в (35).] Пространственная конфигурация мод реальной струны совпадает с конфигурацией мод совершенно упругой струны, т. е. $\lambda_1=2L$, $\lambda_2={}^1/_2\lambda_1$, $\lambda_3={}^1/_3\lambda_1$ и т. д., так как граничные условия в обоих случаях одни и те же. Но частоты колебаний для этих мод не будут удовлетворять «гармонической» последовательности $\nu_2=2\nu_1$, $\nu_3=3\nu_1$ и т. д. Дисперсионное соотношение (36) не создает такой последовательности. Гармоническая последовательность частот получается только в случае $\alpha=0$, т. е. когда $\lambda\nu=\text{const}$. У струны пианино или рояля частоты более высоких мод слегка отличаются (т. е. имеют чуть-чуть большее значение) от частот гармонической последовательности.

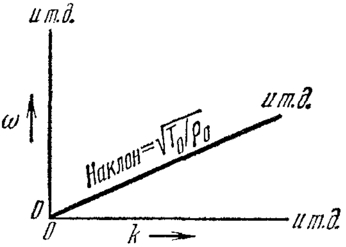

Рис. 2.4. Дисперсионное соотношение для непрерывной однородной струны.

Недиспергирующие и диспергирующие волны **). Волны, удовлетворяющие простому дисперсионному соотношению $\omega/k=\text{const}$, называют недиспергирующими волнами. Если отношение ω/k зависит от длины волны (а значит, и от частоты), волны называют диспергирующими. Обычно можно построить график зависимости ω от k. В случае упругой струны этот график представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат $\omega=k=0$ и имеющую наклон $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ (рис. 2.4).

2.3. Общий случай движения непрерывной струны и фурье-анализ

Наиболее общее движение непрерывной струны (с закрепленными концами, совершающей поперечные колебания вдоль оси x) будет суперпозицией всех мод 1, 2, 3,... с амплитудами A_1, A_2, A_3,...

*) В книге наряду с термином «дисперсионное соотношение» для обозначения зависимости ω от k употребляется равнозначный термин «закон дисперсии». (*Прим. ред.*)

**) Этими терминами мы переводим термины «nondispersive vawes» и «dispersive vawes». (*Прим. ред.*)