

позволяют избежать неясности.) Выражение (35), определяющее ω как функцию k , называется *дисперсионным соотношением* *). Это удобный способ описания волновых свойств системы.

Закон дисперсии для реальной струны пианино. Дисперсионное соотношение (35) очень просто. Позже мы увидим примеры более сложных дисперсионных соотношений, когда величина $\lambda v = \omega/k$ уже не константа, а зависит от длины волны. Например, для струны пианино дисперсионное соотношение может быть приближенно выражено формулой

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T_0}{\rho_0} + \alpha k^2, \quad (36)$$

где α — небольшая положительная константа, которая равна нулю для совершенно упругой струны. [В этом случае соотношение (36) переходит

в (35).] Пространственная конфигурация мод реальной струны совпадает с конфигурацией мод совершенно упругой струны, т. е. $\lambda_1 = 2L$, $\lambda_2 = 1/2 \lambda_1$, $\lambda_3 = 1/3 \lambda_1$ и т. д., так как граничные условия в обоих случаях одни и те же. Но частоты колебаний для этих мод не будут удовлетворять «гармонической» последовательности $\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$ и т. д. Дисперсионное соотношение (36) не создает такой последовательности. Гармоническая последовательность частот получается только в случае $\alpha = 0$, т. е. когда $\lambda v = \text{const}$. У струны пианино или рояля частоты более высоких мод слегка отличаются (т. е. имеют чуть-чуть большее значение) от частот гармонической последовательности.

Недиспергирующие и диспергирующие волны **). Волны, удовлетворяющие простому дисперсионному соотношению $\omega/k = \text{const}$, называются недиспергирующими волнами. Если отношение ω/k зависит от длины волны (а значит, и от частоты), волны называют диспергирующими. Обычно можно построить график зависимости ω от k . В случае упругой струны этот график представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат $\omega = k = 0$ и имеющую наклон $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ (рис. 2.4).

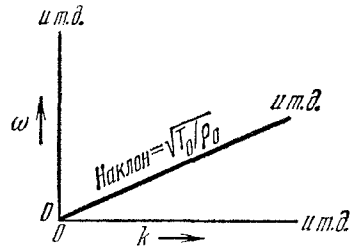


Рис. 2.4. Дисперсионное соотношение для непрерывной однородной струны.

2.3. Общий случай движения непрерывной струны и фурье-анализ

Наиболее общее движение непрерывной струны (с закрепленными концами, совершающей поперечные колебания вдоль оси x) будет суперпозицией всех мод 1, 2, 3, ... с амплитудами A_1, A_2, A_3, \dots

*) В книге наряду с термином «дисперсионное соотношение» для обозначения зависимости ω от k употребляется равнозначный термин «закон дисперсии». (Прим. ред.)

**) Этими терминами мы переводим термины «nondispersive waves» и «dispersive waves». (Прим. ред.)

и фазовыми константами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$:

$$\psi(z, t) = A_1 \sin k_1 z \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin k_2 z \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots, \quad (37)$$

где k_n выбраны так, чтобы удовлетворять граничным условиям при $z=0$ и $z=L$, а частота ω_n связана с волновым числом k_n дисперсионным соотношением $\omega(k)$. Амплитуды A_n и фазы φ_n , которые определяют движение для всех положений z и моментов времени t , вычисляются из начальных условий, т. е. по смещению $\psi(z, t)$ и скорости $v(z, t) = \partial\psi(z, t)/\partial t$ каждой точки в момент времени $t=0$.

Движение струны, закрепленной на концах. Допустим, что в момент времени $t < 0$ при помощи шаблона струне была придана определенная форма $f(z)$. Затем в момент времени $t=0$ убираем шаблон, позволяя струне двигаться. При $t=0$ каждый элемент струны имеет свое смещение $\psi(z, 0)$, равное $f(z)$, и скорость, равную нулю; n -й член в выражении для скорости [т. е. в производной по времени от (37)] пропорционален $\sin(\omega_n t + \varphi_n)$ или $\sin \varphi_n$ для $t=0$. Таким образом, мы можем удовлетворить равенству $v(z, 0)=0$ для всех z , положив каждую фазовую константу φ_n равной либо 0, либо π . Однако выбор фазовой константы $\varphi_1 = \pi$ (например) равносителен перемене знака перед A_1 . Поэтому мы удовлетворим этим начальным условиям, положив все фазовые константы равными нулю, но допуская, что амплитуды A_1, A_2 и т. д. могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Тогда для нулевой начальной скорости $v(z, 0)=0$ имеем

$$\psi(z, t) = A_1 \sin k_1 z \cos \omega_1 t + A_2 \sin k_2 z \cos \omega_2 t + \dots \quad (38)$$

и при $t=0$

$$\psi(z, 0) = f(z) = A_1 \sin k_1 z + A_2 \sin k_2 z + \dots \quad (39)$$

Как мы увидим ниже, уравнение (39) определяет амплитуды A_1, A_2, \dots

Ряды Фурье для функции с нулями на концах. Функция $f(z)$ может быть очень общей функцией от z . Единственное ограничение, которое накладывается на $f(z)$, — это обращение в нуль на концах, т. е. $f(z)=0$ при $z=0$ и $z=L$. Потребуем также, чтобы $f(z)$ не была «ломаной» функцией в «малом» масштабе. Это необходимо потому, что волновая функция $\psi(z, t)$ — медленно меняющаяся функция от z . Функция $f(z)$ должна быть достаточно гладкой, для того чтобы мы смогли придать ее форму струне и для того чтобы струна подчинялась дифференциальному уравнению, полученному с помощью «непрерывного» приближения. Таким образом, мы нашли, что любая разумная функция $f(z)$, которая обращается в нуль в точках $z=0$ и $z=L$, может быть представлена рядом (39), т. е. суммой синусоидальных колебаний. Выражение (39) называется *рядом Фурье* или *разложением Фурье*. В данном случае мы имеем дело с разложением Фурье для функции, равной нулю на концах. В общем случае разложение в ряд Фурье применимо и к более широкому классу функций. Теперь мы найдем этот более широкий класс функций.

Наша функция $f(z)$ должна описывать форму струны, и поэтому она была определена между $z=0$ и L . Однако функции $\sin k_1 z$, $\sin 2k_1 z$, $\sin 3k_1 z$ и т. д., которые составляют ряд (39), определены для всех z от $-\infty$ до $+\infty$. Заметим также, что $\sin k_1 z$ периодичен относительно z с периодом λ_1 . Это значит, что значения $\sin k_1 z$ при любом заданном z и при $z+\lambda_1$ совпадают. (В нашем примере величина периода λ_1 равна $2L$.) Легко видеть, что функция $\sin 2k_1 z$ также периодична по z с периодом λ_1 . (Она делает два цикла на длине λ_1 , поэтому она периодична и с вдвое меньшим периодом $1/2\lambda_1$.) Более того, все синусоидальные функции в (39) периодичны по z с периодом λ_1 . Поэтому и все выражение периодично с периодом λ_1 . Теперь можно расширить класс функций, для которых справедливо разложение Фурье в виде уравнения (39): все периодические функции $F(z)$

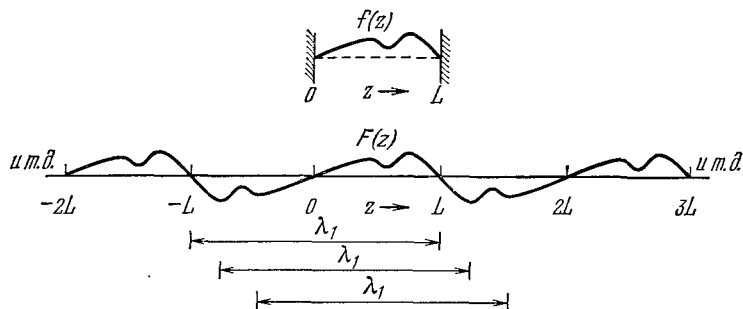


Рис. 2.5. Образование периодической функции $F(z)$ с периодом $\lambda_1=2L$ из функции $f(z)$, исчезающей на концах отрезка $z=0$ и $z=L$.

с периодом λ_1 , которые равны нулю при $z=0$ и $z=\lambda_1/2$, могут быть разложены в ряд Фурье, имеющий вид (39). Данная функция $f(z)$ определена только между точками $z=0$ и L и равна нулю в этих точках. Мы можем образовать периодическую функцию, которая будет иметь такое же разложение Фурье, что и $f(z)$, по следующему правилу: между точками $z=0$ и L функция $F(z)$ совпадает с $f(z)$. Между L и $2L$ функция $F(z)$ является «перевернутым (вокруг оси z) отображением» $f(z)$ в «зеркале», расположенном в точке $z=L$. Теперь то, что мы определяем как $F(z)$ на интервале от $z=0$ до $2L$, продолжим на последовательные интервалы длиной $2L$, чтобы определить $F(z)$ для всех z . Результат этих операций показан на рис. 2.5.

Фурье-анализ периодической функции от z . Здесь мы еще больше расширим класс функций, для которых можно написать разложение Фурье. Уравнение (39) соответствует функциям, которые периодичны с периодом λ_1 и равны нулю в $z=0$ и $\lambda_1/2$. Однако обращение в нуль функции в этих точках есть результат выбора граничных условий, которые заключаются в том, что струна закреплена на обоих концах. Без таких граничных условий мы получили бы решение для колебаний струны, которое включало бы в себя не только члены $\sin nk_1 z$, но также члены $\cos nk_1 z$. Эти функции также периодичны

на z с периодом λ_1 , но не равны нулю при $z=0$ и $\lambda_1/2$. (Они соответствуют колебаниям струны с одним или двумя свободными концами). Включая в ряд Фурье и эти функции, мы приходим к очень общему классу функций, для которых может быть написан ряд Фурье: все периодические функции $F(z)$ с периодом λ_1 , т. е. функции, удовлетворяющие условию $F(z+\lambda_1)=F(z)$ для всех z , могут быть разложены в ряд Фурье, имеющий вид

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \sin n \frac{2\pi}{\lambda_1} z + B_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda_1} z \right] = \\ &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin n \frac{2\pi}{\lambda_1} z + B_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda_1} z \right] = \\ &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nk_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nk_1 z. \end{aligned} \quad (40)$$

Вычисление коэффициентов ряда Фурье. Процесс нахождения амплитуд, или коэффициентов Фурье B_0 , A_n и B_n (для всех n), для заданной периодической функции называется *фурье-анализом*. Покажем, как найти эти коэффициенты.

Начнем с B_0 . Проинтегрируем обе части уравнения (40) от $z=z_1$ до $z=z_2$, где z_1 — любое значение z , а $z_2=z_1+\lambda_1$. Мы предполагаем, что функция $F(z)$ известна, поэтому интеграл от z_1 до z_2 для левой части уравнения (40) может быть найден. Теперь рассмотрим интеграл от правой части (40). У нас бесконечное число членов, и поэтому нужно рассмотреть бесконечное число интегралов.

Первый член справа равен B_0 ; при интегрировании от z_1 до z_2 получаем

$$\int_{z_1}^{z_2} B_0 dz = B_0(z_2 - z_1) = B_0 \lambda_1. \quad (41)$$

Все остальные члены при интегрировании по периоду дадут нуль. Действительно, на протяжении периода функции $\sin nk_1 z$ и $\cos nk_1 z$ одинаковое число раз отрицательны и положительны, поэтому

$$\int_{z_1}^{z_2} \sin nk_1 z dz = 0, \quad \int_{z_1}^{z_2} \cos nk_1 z dz = 0.$$

Таким образом, мы нашли коэффициент B_0 . Он равен

$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_2} F(z) dz. \quad (42)$$

Теперь покажем, как найти коэффициент A_m , где m — некоторое частное значение коэффициента n . Умножим обе части уравнения (40) на $\sin mk_1 z$ и проинтегрируем правую и левую части по периоду функции $F(z)$. Интеграл в левой части может быть вычислен, так как функция $F(z)$ известна. Рассмотрим интеграл в правой части.

Первый член — это интеграл от произведения B_0 на $\sin mk_1z$. Он равен нулю, так как включает m полных периодов $\sin mk_1z$. Осталось вычислить интегралы от произведений $\sin nk_1z \sin mk_1z$ и $\cos nk_1z \times \sin mk_1z$ для $n=1, 2, \dots$

Рассмотрим член, для которого $n=m$. Среднее значение квадрата $\sin^2 mk_1z$ на одном периоде длиной λ_1 равно $1/2$ (λ_1 содержит m полных периодов функции $\sin mk_1z$). Таким образом, при интегрировании правой части (40) появляется член $1/2 A_m \lambda_1$. Все остальные члены при этом равны нулю. Это видно, например, из следующего. Рассмотрим интеграл от $\sin nk_1z \sin mk_1z$, когда $m \neq n$. Подынтегральная функция может быть записана в виде

$$\sin nk_1z \sin mk_1z = \frac{1}{2} \cos (n-m) k_1z - \frac{1}{2} \cos (n+m) k_1z. \quad (43)$$

Так как $(n-m)$ и $(n+m)$ — целые числа, то каждый из двух членов столько же раз положителен на периоде λ_1 , сколько и отрицателен. Поэтому интеграл от этого произведения равен нулю (за исключением случая $n=m$, который мы уже рассмотрели). Аналогично, интеграл от произведения $\cos nk_1z \sin mk_1z$ будет равен нулю, так как

$$\cos nk_1z \sin mk_1z = \frac{1}{2} \sin (m+n) k_1z + \frac{1}{2} \sin (m-n) k_1z.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} A_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} \sin mk_1z F(z) dz. \quad (44)$$

Умножив обе части выражения (40) на $\cos mk_1z$ и проинтегрировав на периоде λ_1 , получим выражение для B_m :

$$\frac{1}{2} B_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} \cos mk_1z F(z) dz. \quad (45)$$

Коэффициенты Фурье. Выпишем теперь полученные результаты, выражаемые равенствами (40), (42), (44) и (45):

$$\begin{aligned} F(z) &= B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mk_1z + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos mk_1z, \\ B_0 &= \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) dz, \\ A_m &= \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \sin mk_1z dz, \\ B_m &= \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \cos mk_1z dz. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь z_1 — любое значение z . Равенства (46) показывают, как любую периодическую функцию от z с периодом λ_1 представить в виде ряда Фурье.

Прямоугольные волны. В качестве примера разложим прямоугольную волну в ряд Фурье. Пусть функция $f(z)$ обращается в

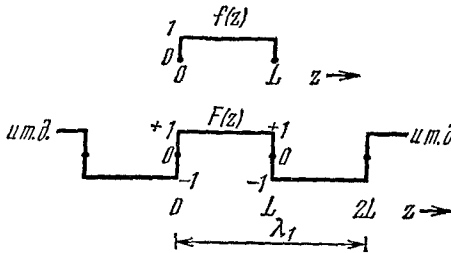


Рис. 2.6. Прямоугольная волна $f(z)$. Периодическая прямоугольная волна $F(z)$.

нуль в точках $z=0$ и $z=L$ и равна $+1$ для $0 < z < L$. (В точках $z=0$ и $z=L$ функция перестает быть непрерывной, т. е. не удовлетворяет сделанному выше предположению, что функция «гладкая» во всех точках. Поэтому нельзя ожидать, что ряд Фурье совершенно точно воспроизведет эту функцию. При конечном числе членов ряда в точках $z=$

$= 0$ и $z=L$ будут сильные выбросы. Увеличение числа членов ряда делает выбросы острее, но их высота не стремится к нулю.)

Периодическая функция $F(z)$, образованная в соответствии с установленными ранее предписаниями (см. рис. 2.5), обладает следующими свойствами: $F(z)=0$ для $z=0$; $+1$ для $0 < z < L$; 0 для L ; -1 для $L < z < 2L$ и т. д., как показано на рис. 2.6.

Воспользовавшись формулами (46), легко получить следующие значения коэффициентов Фурье (задача 2.11): $B_0=0$; $B_m=0$ для всех m ; $A_m=0$ для всех четных $m=2, 4, 6, 8, \dots$; $A_m \approx 4/m\pi$ для нечетных $m=1, 3, 5, 7, \dots$ Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} F(z) &= B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos mk_1z + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mk_1z = \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ \sin k_1z + \frac{1}{3} \sin 3k_1z + \frac{1}{5} \sin 5k_1z + \dots \right\} = \\ &= 1,273 \sin \frac{\pi z}{L} + 0,424 \sin \frac{3\pi z}{L} + 0,255 \sin \frac{5\pi z}{L} + \dots \quad (47) \end{aligned}$$

На рис. 2.7 показана прямоугольная волна $f(z)$, первые три члена разложения (47) и их сумма.

Предположим, что в момент времени $t=0$ мы придали струне форму, определяемую выражением

$$g(z) = 1,273 \sin \frac{\pi z}{L} + 0,424 \sin \frac{3\pi z}{L} + 0,255 \sin \frac{5\pi z}{L}. \quad (48)$$

Она соответствует первым трем членам ряда (47) и показана на рис. 2.7, б. Отпустим струну в момент времени $t=0$. Какой будет функция $\psi(z, t)$? Будет ли сохраняться форма рис. 2.7, б с течением времени? (См. задачу 2.16.)

Фурье-анализ для периодической функции времени. Рассмотрим функцию $F(t)$, определенную для всех t и имеющую период T_1 :

$$F(t + T_1) = F(t) \quad \text{для любых } t. \quad (49)$$

Мы предполагаем, что функция $F(t)$ может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t, \quad (50)$$

где

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}. \quad (51)$$

Коэффициенты Фурье могут быть получены непосредственно из приведенных выше результатов фурье-анализа пространственной периодической функции $F(z)$, так как математика для переменных $\theta = \omega_1 t$ и $\theta = k_1 z$ одна и та же. Таким образом, для коэффициентов ряда $\alpha)$ (50) имеем на основании (46)

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) dt, \\ B_n &= \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) \cos n\omega_1 t dt, \\ A_n &= \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) \sin n\omega_1 t dt, \end{aligned} \right\} (52)$$

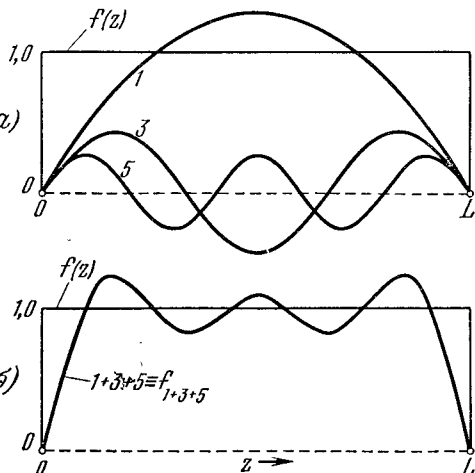


Рис. 2.7. Фурье-анализ прямоугольной волны $f(z)$. а) Прямоугольная волна и три первые составляющие разложения Фурье. Цифры 1, 3 и 5 относятся к нормальным модам 1, 3 и 5; б) прямоугольная волна и суперпозиция f_{1+3+5} первых трех составляющих разложения Фурье.

где t_1 — любой подходящий момент времени.

*Звучание аккорда рояля**). В качестве иллюстрации к сказанному, вместо фурье-анализа известной функции

$F(t)$, рассмотрим суперпозицию известных компонент. Предположим, что в нашем распоряжении рояль, настроенный так, что он имеет «научный строй» (о музыкальных строях см. домашний опыт 2.6). Положим $\nu_1 = 128$ гц. Эта нота С на одну октаву ниже ноты С256. Теперь положим $\nu_3 = 3\nu_1 = 384$ гц. Это G выше С256. Положим $\nu_5 = 5\nu_1 = 640$ гц. Это E выше G и выше С256. Ударим по этим трем струнам. Если вы ударили одновременно и с такой силой, что величина давления воздуха на ухо (в соответствующих единицах) от струны С128 — $1,273 \sin 2\pi\nu_1 t$, от струны G384 — $0,424 \sin 2\pi\nu_3 t$ и от струны E640 — $0,255 \sin 2\pi\nu_5 t$, то полное давление $p(t)$ равно

$$p(t) = 1,273 \sin 2\pi\nu_1 t + 0,424 \sin 2\pi\nu_3 t + 0,255 \sin 2\pi\nu_5 t. \quad (53)$$

Суперпозиция (53) очень похожа на суперпозицию (48), изобра-

*) См. примечание на стр. 50.

женную на рис. 2.7,б. Для того чтобы получить график $p(t)$, нам нужно заменить $k_1 z$ на $\omega_1 t$. После замены получим график, показанный на рис. 2.8. Если по этим струнам ударить не одновременно (т. е. с разбросом во времени много меньшим, чем $1/128$ сек), то относительные фазы трех нот не будут такими, как в (53) и их суперпозиция не будет иметь вид, показанный на рис. 2.8. Но наше ухо этого не заметит! Мы распознаем отдельные ноты аккорда, а информация об относительных фазах нами не воспринимается.

Орган в ухе, реагирующий на тон, называется *основной перепонкой*. Она расположена в находящемся во внутреннем ухе органе спиральной формы, заполненном жидкостью. Этот орган называется *ушной улиткой*. Ушная улитка механически связана с барабанной

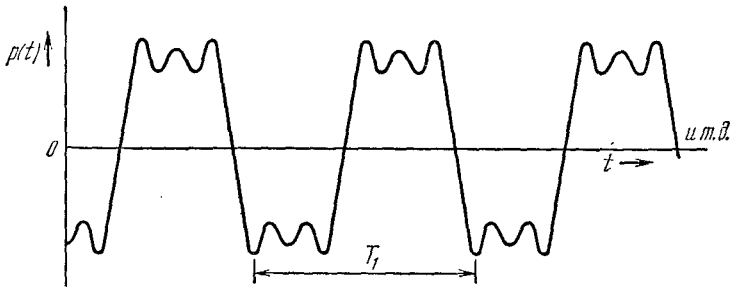


Рис. 2.8. Звуковое давление, создаваемое суперпозицией нот C128, G 384 и E640 с относительными амплитудами и фазами равенства (53).

Период $T_1 = 1/128$ сек.

перепонкой. Конец основной перепонки вблизи барабанной перепонки резонирует при частоте около $20 \cdot 10^3$ гц, а самый дальний ее конец резонирует при частоте 20 гц. Таким образом, интервал воспринимаемых ухом частот лежит между 20 гц и $20 \cdot 10^3$ гц. Нерв ушной улитки имеет чувствительные окончания в основной перепонке и «преобразует» механические колебания в электрические сигналы, которые поступают в мозг, где воспринимаются нами как звуковые ощущения. Беря несколько раз один и тот же аккорд, мы видим, что наши звуковые ощущения одни и те же (даже если формы $p(t)$ из-за различных фазовых констант сильно различаются). Отсюда следует, что информация об относительных фазах колебаний различных участков основной перепонки где-то теряется. Возможно, что мы и не получаем подобной информации из-за того, что «преобразователь» представляет собой *квадратичный детектор*, электрический сигнал на выходе которого пропорционален квадрату амплитуды колебаний перепонки. Возможно также, что сигнал нерва несет информацию о фазе [т. е. сигнал пропорционален $\psi(x, t)$, а не $\psi^2(x, t)$], но мозг не воспринимает эту информацию, т. е. не реагирует на некоторые сигналы нерва. По-видимому, в фазовой информации нет особой ценности, так как в противном случае (в нашем эволюционном раз-

вити) мы должны были бы оказаться обладателями механизма для распознавания фазы.

Другие граничные условия. В общем случае поперечных колебаний непрерывной струны нет необходимости, чтобы оба ее конца были закреплены. Один или оба конца могут быть свободны, по крайней мере в случае поперечных колебаний. Натяжение струны и равновесную конфигурацию можно создать при помощи невесомого кольца, скользящего без трения по стержню, который направлен вдоль оси x и перпендикулярен оси равновесной конфигурации (эта ось совпадает с осью z). Нормальные моды при этом будут иметь другую конфигурацию, чем в случае двух закрепленных концов. Они по-прежнему будут синусоидальными функциями от z , описываемыми выражением (19), а дисперсионное соотношение между частотой и длиной волны будет иметь вид (22). Действительно, все рассуждения, предшествовавшие решению (23), которое представляет собой общее решение для смещения струны в отдельной моде, не зависят от начальных условий. Мы перешли к решению для струны, закрепленной в точках $z=0$ и $z=L$, после рассмотрения решения (23).

Если трение между стержнем и кольцом отсутствует, то на свободном конце колеблющейся струны нет поперечной силы, действующей на струну. Это значит, что *наклон струны на свободном*

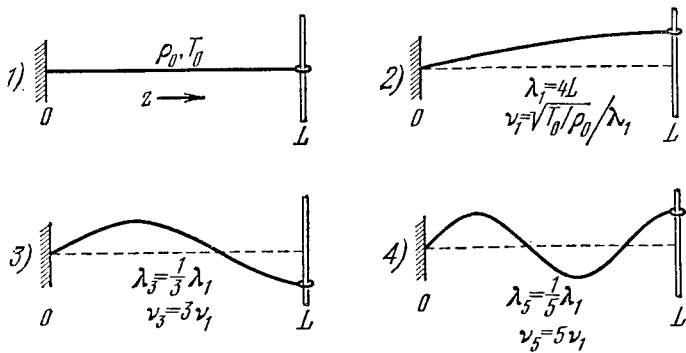


Рис. 2.9. Моды колебаний непрерывной струны, один конец которой свободен, а другой закреплен.

конце должен равняться нулю в любой момент времени. При попытке воздействовать поперечной силой на свободный конец струны она будет двигаться таким образом, чтобы уменьшить эту силу до нуля, и конец струны останется горизонтальным, хотя, конечно, не будет неподвижным. (Смысл всего этого следующий: невозможно давить на объект, который не давит на вас, но можно смещать его по своему желанию).

На рис. 2.9 показаны моды для струны с одним закрепленным концом. Мы пронумеровали их в соответствии с числом четвертей длины волны, укладывающихся на полной длине струны L .

Заметим, что гармоники с частотами $2\nu_1$, $4\nu_1$ и т. д. выпадают. Применение фурье-анализа к функции $f(z)$, равной нулю при $z=0$ и имеющей нулевой наклон в точке $z=L$, рассмотрено в задаче 2.29.

Зависимость «качества тона» (тембра) от метода возбуждения.

Когда молоточек бьет по струне рояля, то вместе с основной (ν_1) гармоникой возбуждаются в некоторой степени и вторая гармоника или октава ($2\nu_1$), октава плюс квинта ($3\nu_1$), вторая октава ($4\nu_1$), вторая октава плюс большая терция ($5\nu_1$), вторая октава плюс квинта ($6\nu_1$) и т. д., как более высокие гармоники основного тона ν_1 . Величина и фаза каждой фурье-компоненты (каждой гармоники) зависят от начальной конфигурации и скорости всех частиц струны в момент после удара. Результат в большой степени зависит от расположения молоточка, т. е. его расстояния от конца струны. Нельзя, например, ожидать возбуждения моды с узлом в точке удара, так как молоточек сообщает при ударе начальную скорость той части струны, по которой он бьет. Например, если струну ударяют посередине, то моды с узлом в центре струны не будут возбуждены. Рассмотрение рис. 2.3 показывает, что в этом случае пропадут все четные гармоники. Так, ущипнув за середину струны C128, мы можем ожидать суперпозиции колебаний C128, G384, E640 и т. д. Тембр в этом случае будет заметно отличаться от того, который будет в случае удара по струне недалеко от конца, когда возникает суперпозиция C128, C256, G384, C512, E640, G768 и т. д.

Моды однородной струны образуют полный набор функций.

Начав с изучения струны, закрепленной на концах, мы нашли, что любая разумная функция $f(z)$, определенная между $z=0$ и $z=L$ и равная нулю в этих точках, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nk_1 z, \quad k_1 L = \pi. \quad (54)$$

Поэтому говорят, что функции $\sin nk_1 z$, где $n=1, 2, 3, \dots$, образуют *полный набор* функций (по отношению к функции $f(z)$, равной нулю в точках $z=0$ и L). Полный набор функций определяется как последовательность функций, с помощью которых любая функция $f(z)$ при соответствующем значении коэффициентов может быть записана в виде суперпозиции функций набора.

Неоднородная струна. Существуют ли другие полные наборы функций, кроме синусоидальных функций, образующих ряд Фурье? Да, существует бесконечно много полных наборов. Мы можем убедиться в этом на следующем примере. Предположим, что струна неоднородна, т. е. либо плотность струны, либо ее натяжение (либо обе эти величины) являются непрерывными функциями от z . (Примером «струны» с изменяющейся плотностью и натяжением может служить вертикально подвешенная «пружина» с закрепленными нижним и верхним концами. Натяжение внизу меньше, чем наверху, на величину Mg , где M — масса «пружины».) Теперь уравнение движения небольшого сегмента струны не будет больше подчиняться

классическому волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}.$$

Действительно, в этом случае равновесное натяжение $T_0(z)$ и плотность $\rho_0(z)$ зависят от z и колебания будут (см. задачу 2.10) удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[T_0(z) \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right]. \quad (55)$$

Это уравнение переходит в классическое волновое уравнение, только если $T_0(z)$ и $\rho_0(z)$ превращаются в константы, не зависящие от z . В нормальной моде *неоднородной струны*, так же как и в моде однородной струны, каждая часть струны совершает гармоническое колебательное движение с одинаковой частотой и фазовой константой:

$$\psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi). \quad (56)$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \varphi), \quad (57)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{dA(z)}{dz}. \quad (58)$$

Подставляя это в уравнение (55) и сокращая на общий множитель $\cos(\omega t + \varphi)$, получим уравнение для моды

$$\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d}{dz} \left[T_0(z) \frac{dA(z)}{dz} \right] = -\omega^2 A(z). \quad (59)$$

Синусоидальная форма стоячих волн — свойство однородной системы. Геометрическая форма моды определяется функцией $A(z)$, которая является решением уравнения (59) с соответствующими граничными условиями: $A(z) = 0$ при $z = 0$ и $z = L$. Функция $A(z)$ будет синусоидальной только при постоянных T_0 и ρ_0 . Таким образом, синусоидальные колебания в пространстве характерны только для нормальных мод *однородных систем*.

Моды неоднородной струны образуют полный набор функций. Приведем без доказательства свойства нормальных мод неоднородной струны с закрепленными в точках $z = 0$ и $z = L$ концами. Первая мода соответствует решению $A_1(z)$ уравнения (59), которое обращается в нуль только в точках $z = 0$ и $z = L$ (оно похоже на одну полуволну «искаженной синусоиды», у которой нет узлов между нулем и L). Этой моде соответствует частота ω_1 . Следующая мода имеет *один узел* между $z = 0$ и $z = L$ и, таким образом, представляет полную длину волны искаженной синусоиды. Ей отвечает частота ω_2 ; m -я мода имеет $m - 1$ узлов между $z = 0$ и $z = L$ и соответствует m полуволнам искаженной синусоиды. Существует бесконечное число мод (для непрерывной струны). Функции $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$, ..., которые определяют пространственную часть моды, образуют полный набор для любой «подходящей» функции $f(z)$, равной нулю на концах. «Подходящая» функция $f(z)$ должна быть такой, какую могут образовать либо струна, либо «пружина» без нарушения наших предпо-

ложений. Мы можем сделать шаблон, имеющий форму $f(z)$, вставить неоднородную струну в шаблон и освободить ее в момент времени $t=0$. Струна будет совершать колебания, которые представляют собой суперпозицию бесконечного числа мод:

$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z) \cos \omega_m t. \quad (60)$$

Когда $t=0$, имеем

$$\psi(z, 0) = f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z). \quad (61)$$

Равенство (61) показывает, что функция $f(z)$ (предмет наших рассуждений) может быть разложена по функциям $A_m(z)$. Таким образом, $A_m(z)$ образует полный набор функций, аналогично тому как синусоидальные функции ряда Фурье образуют полный набор для функции $f(z)$, равной нулю в точках $z=0$ и $z=L$.

Собственные функции. Существует бесконечно много способов осуществления струны с неравномерными плотностью и натяжением. Поэтому бесконечно велико и число различных полных наборов функций $A_m(z)$. Синусоидальные функции от z не являются единственными функциями для разложения $f(z)$. Но они замечательны своей простотой. Эти функции определяют моды всегда, когда мы имеем пространственно однородную систему. В противном случае применение синусоидальных функций не будет особенно успешным. Вместо них следует попытаться найти такие функции $A_m(z)$, которые соответствуют нормальным модам системы. Эти функции $A_m(z)$, или в общем случае $A_m(x, y, z)$, называются *собственными функциями* системы. Они дают *пространственную* зависимость нормальных мод.

Для любой точки (x, y, z) *временная* зависимость моды *всегда* определяется множителем $\cos(\omega t + \phi)$. Таким образом, мода представляет собой одновременные малые колебания (достаточно малые, чтобы они описывались линейным уравнением) всех движущихся элементов, которые колеблются с одинаковой частотой и фазой. Когда вся система представлена одной модой, она пульсирует и «трепещет», как один большой осциллятор.

Каждая мода имеет свою «форму», т. е. свою собственную функцию $A_m(z)$. Соотношение между частотой моды и ее формой называется дисперсионным соотношением $\omega(k)$, когда собственные функции имеют вид синусоид. Если они не синусоидальны, мы не можем оперировать такими понятиями, как длина волны или волновое число k . В этом случае соотношение между частотой моды и ее формой не принято называть «дисперсионным соотношением».

2.4. Моды дискретной системы с N степенями свободы

В п. 2.2 мы рассмотрели непрерывную струну, которая представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Никакая реальная механическая система не имеет бесконечного числа степеней свободы, а мы заинтересованы в изучении реальных систем.