

ложений. Мы можем сделать шаблон, имеющий форму $f(z)$, вставить неоднородную струну в шаблон и освободить ее в момент времени $t=0$. Струна будет совершать колебания, которые представляют собой суперпозицию бесконечного числа мод:

$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z) \cos \omega_m t. \quad (60)$$

Когда $t=0$, имеем

$$\psi(z, 0) = f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z). \quad (61)$$

Равенство (61) показывает, что функция $f(z)$ (предмет наших рассуждений) может быть разложена по функциям $A_m(z)$. Таким образом, $A_m(z)$ образует полный набор функций, аналогично тому как синусоидальные функции ряда Фурье образуют полный набор для функции $f(z)$, равной нулю в точках $z=0$ и $z=L$.

Собственные функции. Существует бесконечно много способов осуществления струны с неравномерными плотностью и натяжением. Поэтому бесконечно велико и число различных полных наборов функций $A_m(z)$. Синусоидальные функции от z не являются единственными функциями для разложения $f(z)$. Но они замечательны своей простотой. Эти функции определяют моды всегда, когда мы имеем пространственно однородную систему. В противном случае применение синусоидальных функций не будет особенно успешным. Вместо них следует попытаться найти такие функции $A_m(z)$, которые соответствуют нормальным модам системы. Эти функции $A_m(z)$, или в общем случае $A_m(x, y, z)$, называются *собственными функциями* системы. Они дают *пространственную* зависимость нормальных мод.

Для любой точки (x, y, z) *временная* зависимость моды *всегда* определяется множителем $\cos(\omega t + \phi)$. Таким образом, мода представляет собой одновременные малые колебания (достаточно малые, чтобы они описывались линейным уравнением) всех движущихся элементов, которые колеблются с одинаковой частотой и фазой. Когда вся система представлена одной модой, она пульсирует и «трепещет», как один большой осциллятор.

Каждая мода имеет свою «форму», т. е. свою собственную функцию $A_m(z)$. Соотношение между частотой моды и ее формой называется дисперсионным соотношением $\omega(k)$, когда собственные функции имеют вид синусоид. Если они не синусоидальны, мы не можем оперировать такими понятиями, как длина волны или волновое число k . В этом случае соотношение между частотой моды и ее формой не принято называть «дисперсионным соотношением».

2.4. Моды дискретной системы с N степенями свободы

В п. 2.2 мы рассмотрели непрерывную струну, которая представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Никакая реальная механическая система не имеет бесконечного числа степеней свободы, а мы заинтересованы в изучении реальных систем.

В этом пункте мы найдем точное решение для мод струны с закрепленными концами, несущей на себе N равномерно распределенных грузов. В пределе, устремив N к бесконечности (при конечной длине L), мы вернемся к стоячим волнам п. 2.2. Однако наша цель не только в этом. Мы обнаружим, что, совершая предельный переход к непрерывной струне, мы теряем некоторые чрезвычайно интересные свойства систем. Вспомним, что, используя гладкую функцию $\psi(z, t)$ для описания смещения, когда N велико, но конечно, мы должны были отказаться от рассмотрения самых высоких мод, т. е. мод $m=N, N-1, N-2$ и т. д., и ограничиться значениями m , значительно меньшими N . Дело в том, что моды порядка N имеют «зигзагообразную» конфигурацию, показанную на рис. 2.1, при которой нельзя считать, что соседние грузы имеют близкое смещение.

Наиболее интересный результат, который мы получим в этом пункте, заключается в том, что закон дисперсии, выведенный для *непрерывной* струны: ω равно постоянной, умноженной на k ,— обычно не выполняется. Этот закон, связывающий частоту и длину волны, показывает, что частота удваивается, когда длина волны уменьшается в два раза. Он является приближением, справедливым в предельном случае непрерывной упругой струны, и перестает быть верным для реальной струны. Это приводит к интересному физическому явлению, называемому дисперсией. Среда, которая удовлетворяет простому закону дисперсии, выведенному выше ($\omega = \text{const} \cdot k$), называется средой без дисперсии (или недиспергирующей средой) для соответствующих волн. Если закон дисперсии имеет другой вид, среда называется средой, обладающей дисперсией (или диспергирующей средой). Рассмотрим пример.

Пример 1. Поперечные колебания струны с грузами. Такая система показана на рис. 2.10. Имеется N грузов, расположенных

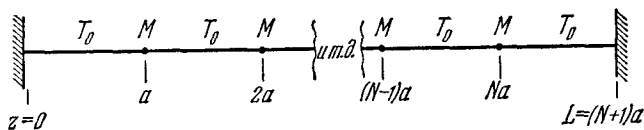


Рис. 2.10. Равновесное положение нагруженной струны.

в точках $z=a, 2a, \dots, Na$. Полная длина L равна $(N+1)a$. Масса каждого груза равна M , отрезки струны (пружины) между грузами одинаковы, невесомы и подчиняются закону Гука. Натяжение в равновесии равно T_0 . Если пружины (струны) удовлетворяют приближению «пружины» (натяжение пропорционально длине), то колебания могут иметь произвольно большую амплитуду и все же будут описываться линейными уравнениями движения. Если же пружины не являются «пружинами», то для того, чтобы получить линейные уравнения движения, следует ограничиться рассмотрением малых колебаний.

Теперь рассмотрим общий случай, показанный на рис. 2.11. (Мы ограничимся только поперечными колебаниями вдоль оси x . Позже мы рассмотрим продольные колебания вдоль z . Общее движение является суперпозицией продольных колебаний вдоль z и поперечных вдоль x и y .) Смещение груза n вверх (см. рис. 2.11)

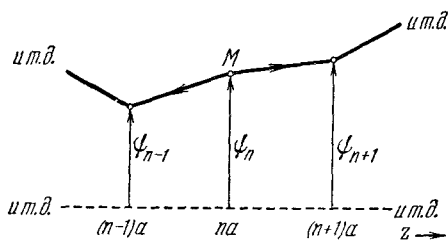


Рис. 2.11. Общая конфигурация нагруженной струны, совершающей поперечные колебания по оси x .

от положения равновесия равно $\psi_n(t)$, где $n=1,2,3,\dots,N-1, N$. Рассмотрим какой-нибудь произвольный груз n и два соседних груза, $(n-1)$ слева и $(n+1)$ справа от n .

Уравнение движения. Наша цель — найти уравнение движения для груза n . В п. 1.2 мы решили подобную задачу для системы с одной степенью свободы, а в п. 1.4 — для системы с двумя степенями сво-

боды. Предоставляем читателю показать, что как для приближения «пружины», так и для малых колебаний применение второго закона Ньютона к движению груза n дает следующее уравнение движения:

$$M \frac{d^2 \psi_n(t)}{dt^2} = T_0 \left[\frac{\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)}{a} \right] - T_0 \left[\frac{\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t)}{a} \right]. \quad (62)$$

Уравнение (62) соответствует общему случаю: оно справедливо для произвольного движения свободно колеблющейся системы, т. е. для произвольной суперпозиции N различных мод.

Нормальные моды. Нам нужно найти частоты и конфигурации отдельных мод. Предположим, что мы имеем моду с частотой ω . Каждый груз совершает гармонические колебания с частотой ω и фазовой постоянной φ . Форма моды определяется отношением амплитуд колебаний различных грузов. Обозначим через A_n амплитуду колебаний n -го груза для рассматриваемой нами моды. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi); & \psi_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi); & \dots; \\ \psi_{n-1}(t) &= A_{n-1} \cos(\omega t + \varphi); & \psi_n &= A_n (\cos \omega t + \varphi); \\ \psi_{n+1}(t) &= A_{n+1} \cos(\omega t + \varphi); & \dots \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Из уравнений (63) получим

$$\frac{d^2 \psi_n(t)}{dt^2} = -\omega^2 A_n \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \psi_n(t). \quad (64)$$

Подставив уравнение (64) в левую часть (62), а (63) в правую часть (62) и сократив на $\cos(\omega t + \varphi)$, получим

$$-M\omega^2 A_n = \frac{T_0}{a} (A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}),$$

т. е.

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n \left(2 - \frac{Ma}{T_0} \omega^2 \right). \quad (65)$$

Уравнение (65) выглядит «устрашающе». Оно определяет зависимость формы моды от угловой частоты. Попытаемся угадать его решение, опираясь на известное нам решение для мод непрерывной струны с закрепленными в точках $z=0$ и $z=L$ концами. Для этой задачи мы нашли, что моды имеют вид

$$A(z) = A \sin \frac{2\pi z}{\lambda} = A \sin kz. \quad (66)$$

Конечно, наше решение для A_n должно в пределе (при стремлении n к бесконечности) переходить в уравнение (66).

Попытаемся найти решение, положив в (66) $z=na$:

$$A_n = A \sin \frac{2\pi na}{\lambda} = A \sin kna. \quad (67)$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A \sin k(n+1)a = A \sin(kna + ka) = \\ &= A(\sin kna \cos ka + \cos kna \sin ka), \\ A_{n-1} &= A \sin k(n-1)a = A \sin(kna - ka) = \\ &= A(\sin kna \cos ka - \cos kna \sin ka); \\ A_{n+1} + A_{n-1} &= 2A \sin kna \cos ka = 2A_n \cos ka. \end{aligned} \quad (68)$$

Подставляя (68) в (65), получим

$$2A_n \cos ka = A_n \left(2 - \frac{Ma}{T_0} \omega^2 \right). \quad (69)$$

Точное дисперсионное соотношение для струны с грузами. Предположим, что уравнение (69) справедливо для любого груза n , независимо от того, равно или нет A_n нулю в данной моде. Поэтому мы можем рассматривать груз, который находится вне узловой точки, т. е. груз, для которого A_n не равно нулю. После сокращения на A_n получим условие, которому должна удовлетворять наша догадка, чтобы быть на самом деле решением:

$$2 \cos ka = 2 - \frac{Ma}{T_0} \omega^2,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2T_0}{Ma} (1 - \cos ka) = \frac{2T_0}{Ma} \left[1 - \left(\cos^2 \frac{ka}{2} - \sin^2 \frac{ka}{2} \right) \right], \\ \omega^2 &= \frac{4T_0}{Ma} \sin^2 \frac{ka}{2} = \frac{4T_0}{Ma} \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda}. \end{aligned} \quad (70)$$

Выражение (70), связывающее частоту ω и длину волны λ (или волновое число) для данной моды, называется дисперсионным соотношением для струны с грузами.

Граничные условия. Мы еще не учли полностью граничные условия. Написав формулу (67) вместо более общего выражения

$$A_n = A \sin kna + B \cos kna, \quad (71)$$

мы удовлетворили граничному условию в $z=0$, заключающемуся в том, что смещение струны в этой точке для любой моды равно нулю. Действительно, полагая $z=na=0$ в (71) и требуя, чтобы $A_0=0$, мы

получим, что $B=0$. Мы должны также удовлетворить граничному условию в точке $z=L$, согласно которому смещение в этой точке также равно нулю. Стена в точке $z=L$ соответствует «закрепленному грузу $N+1$ », поэтому A_{N+1} следует положить равным нулю:

$$A_{N+1} = A \sin k(N+1)a = A \sin kL = 0. \quad (72)$$

Существует N возможных решений уравнения (72). Каждое решение соответствует определенной моде m , где $m=1, 2, \dots, N$. Мы нумеруем моды так, что мода $m=1$ имеет самую большую длину волны. Имеем

$$k_1L = \pi, \quad k_2L = 2\pi, \quad \dots, \quad k_mL = m\pi, \quad \dots, \quad k_NL = N\pi. \quad (73)$$

Существование лишь N решений объясняется тем, что последний член в (73) соответствует полностью «зигзагообразной» конфигурации. Закрепленный в точке $z=0$ первый отрезок струны поднимается вверх до первого груза, после чего второй отрезок струны опускается вниз до второго груза, ..., отрезок $N+1$ опускается (или поднимается) от груза N к стене. Уравнение (72) может иметь дальнейшие решения: $k_{N+1}L = (N+1)\pi$, $k_{N+2}L = (N+2)\pi$ и т. д., но, чтобы осуществить все «зигзаги», которые заключают в себе эти решения, нужно иметь струну с числом сегментов большим, чем у нас.

Уравнение (65) для мод было получено без рассмотрения граничных условий. (На рис. 2.11 нет никаких границ). Наиболее общее решение этого уравнения имеет вид (71), где B/A и k определяются из граничных условий. Если подставить решение (71) в уравнение (65), то мы найдем дисперсионное соотношение (70), не зависящее от граничных условий, т. е. от величин A , B и k . Сделайте это сами (задача 2.19). Для наших граничных условий (струна закреплена в точках $z=0$ и $z=L$) моды определяются уравнением (72), с коэффициентами k_m из уравнений (73), а частоты ω_m следуют из уравнения (70). Заметим, что моды, следующие из уравнений (73), те же, что и в случае непрерывной струны. Разница лишь в том, что у непрерывной струны $N=\infty$ и для нее нельзя указать самой высокой моды. Заметим также, что у струны с грузами сегменты между грузами являются отрезками прямой, а не гладкими синусоидальными функциями. На рис. 2.12 показан случай, когда $N=5$.

На рис. 2.13 показан график дисперсионного соотношения, определяемого уравнением (70):

$$\omega(k) = 2 \sqrt{\frac{T_0}{Ma}} \sin \frac{ka}{2}. \quad (74)$$

Пять точек на графике дают k и ω для пяти мод струны с пятью грузами, закрепленной с обоих концов. При другом числе грузов или при других граничных условиях (например, свободный конец в точке $z=L$) точки, соответствующие различным модам, будут лежать в других местах этой же кривой $\omega(k)$. Таким образом, рис. 2.13 годится для любой струны с грузами.

Непрерывное приближение, или приближение длинных волн. В приближении непрерывно распределенной массы мы предпо-

лагаем, что между $z=0$ и $z=L$ имеется бесконечное число грузов. В этом случае a стремится к нулю. Интересно выяснить, как ведет себя наше точное дисперсионное соотношение, если a очень мало, но не равно нулю. Когда мы говорим, что расстояние a мало, мы

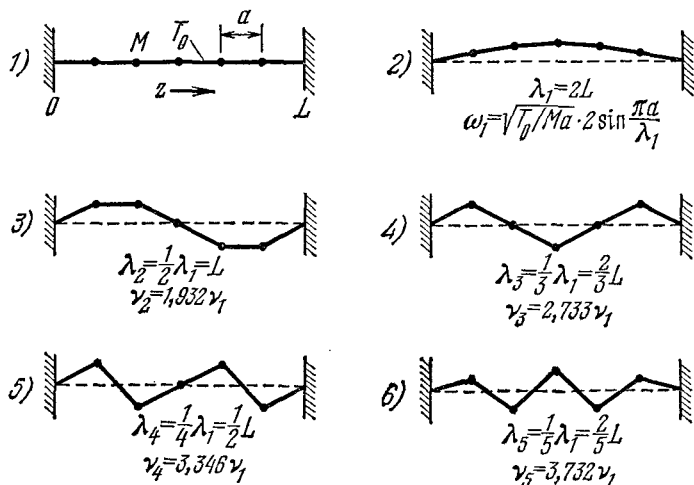


Рис. 2.12. Моды колебаний струны с пятью грузами.

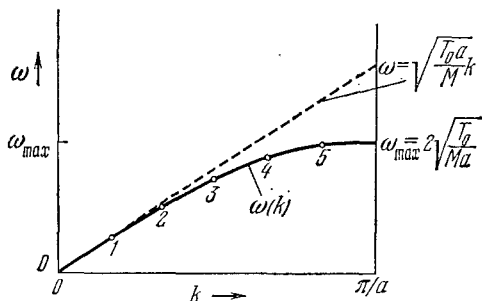


Рис. 2.13. Дисперсионное соотношение для нагруженной струны.

Пять отмеченных точек соответствуют пяти модам закрепленной на концах струны с пятью грузами. При других граничных условиях и при другом числе грузов соответствующие точки займут другие положения на той же кривой.

должны понимать, по сравнению с чем оно мало. Непрерывное приближение хорошо в случае, когда расстояние a между грузами мало по сравнению с длиной волны λ :

$$a \ll \lambda, \quad ka = 2\pi \frac{a}{\lambda} \ll 1.$$

Вспользуемся разложением в ряд Тейлора [приложение I, (4)]

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \dots$$

Подставляя этот ряд в (74) и полагая $x = \frac{1}{2} ka$, мы получаем

$$\begin{aligned} \omega(k) &= 2 \sqrt{\frac{T_0}{Ma}} \left[\frac{1}{2} ka - \frac{1}{48} (ka)^3 + \dots \right] = \\ &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M}} k \left[1 - \frac{1}{24} (ka)^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

т. е.

$$\omega(k) \approx \sqrt{\frac{T_0 a}{M}} k. \quad (75)$$

Соотношение (75) говорит об отсутствии дисперсии. Для непрерывной струны, где $M/a = \rho_0$, этот результат был получен в п. 2. 3.

Дисперсионное соотношение для струны рояля. Мы нашли, что моды реальной струны не удовлетворяют дисперсионному соотношению (75). Поэтому можно ожидать, что обертоны струны рояля, например обертоны C256, G384 и C512 основного тона C128, не будут выдерживаться точно. Действительно, это так. Из уравнения (74) или из графика рис. 2.13 видно, что возрастание волнового числа k вызывает не прямо пропорциональные, а несколько меньшие увеличения частоты. Поэтому можно ожидать, что обертоны струны рояля будут чуть-чуть ниже предсказываемых теорией для непрерывной струны: частота второй гармоники будет $\nu_2 < 256$, третьей $\nu_3 < 384$ и т. д. На самом деле это не так! Обертоны струны рояля не будут ниже, они будут *выше* (т. е. будут *диезными*) обертонов, следующих из уравнения (75). Объяснение в том, что ни модель совершенно непрерывной и совершенно упругой струны, ни модель струны с грузами не дают правильного описания колебаний струны рояля. В частности, модель струны с грузами хуже модели непрерывной струны, так как она дает поправку, знак которой неверен.

Трудности с непрерывной моделью объясняются тем, что струна рояля не является совершенно гибкой. Когда вы изогнете ее, она выпрямится вновь, даже если нет натяжения, помогающего ей в этом. Поэтому возвращающая сила, действующая на маленький сегмент струны (т. е. сила, стремящаяся выпрямить струну), будет чуть-чуть больше силы, предсказываемой моделью совершенно гибкой струны. Частота моды, конечно, определяется из условия $\omega^2 =$ возвращающей силе на единицу смещения и на единицу массы. Более высокие моды имеют более короткие длины волн, и, следовательно, им отвечает больший изгиб струны. Поэтому недостаточная гибкость струны (жесткость) играет большую роль для высоких мод, чем для низких, частота возрастает скорее, чем это следует из модели совершенно гибкой струны.

Все сказанное можно представить себе следующим образом. Возвращающая сила, вызванная натяжением, и та ее часть, которая связана с жесткостью, возрастают с ростом k . Однако поскольку влияние жесткости относительно сильнее для больших k , чем для малых, то возвращающая сила, связанная с жесткостью, должна возрастать с ростом k с большей скоростью, чем возвращающая сила, обу-

словленная натяжением. Последняя пропорциональна k^2 . Оказывается, что сила, обусловленная жесткостью, пропорциональна k^4 . Таким образом, дисперсионное соотношение для реальной струны рояля имеет вид

$$\omega^2 \approx \frac{T_0}{\rho_0} k^2 + \alpha k^4, \quad (76)$$

где α — положительная константа, появление которой вызвано наличием жесткости. Если бы член, связанный с жесткостью, был пропорционален k^2 , то мы снова получили бы отсутствие дисперсии, описываемое уравнением (75), в котором вместо T_0/ρ_0 стояло бы $(T_0/\rho_0) + \alpha$ и отношения частот удовлетворяли бы равенствам $\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$ и т. д., т. е. снова были бы «гармоническими». Рассмотрим примеры.

Пример 2. Продольные колебания в системе, состоящей из пружинок и масс. Этот важный пример позже поможет нам понять свойства звуковых волн. (Звуковые волны представляют собой продольные колебания, т. е. колебания, перпендикулярные фронту волны.)

Случаи, когда $N=1$ и $N=2$, были рассмотрены в пп. 1.2 и 1.4. Рассмотрим сейчас общий случай N масс, соединенных пружинами, как показано на рис. 2.14.

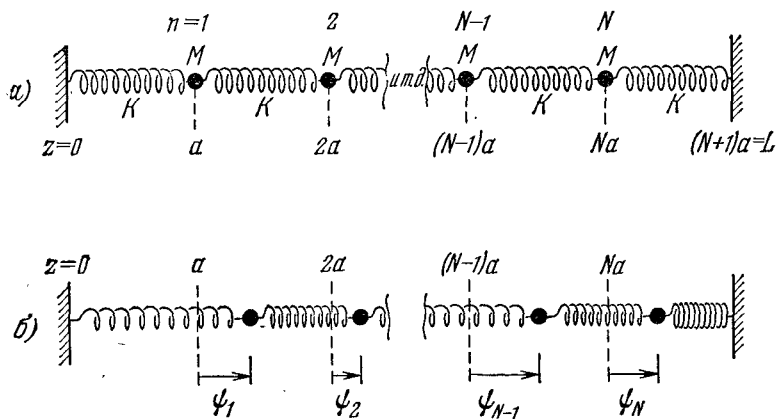


Рис. 2.14. Продольные колебания N масс и $N+1$ пружинок.
а) Равновесное положение; б) конфигурация для общего случая.

Легко вывести уравнение движения груза n . (Если вам это трудно, посмотрите вывод для $N=2$, п. 1.4.) Мы получим

$$M \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = K (\psi_{n+1} - \psi_n) - K (\psi_n - \psi_{n-1}). \quad (77)$$

Математическая форма уравнения (77) совпадает с формой уравнения (62), за тем исключением, что множитель T_0/a заменен на коэффициент жесткости пружины K . Поэтому все наши математические выкладки можно повторить. Заменяя в уравнении (74)

T_0/a на K , получим дисперсионное соотношение

$$\omega(k) = 2 \sqrt{\frac{K}{M}} \sin \frac{ka}{2} = 2 \sqrt{\frac{K}{M}} \sin \frac{\pi a}{\lambda}. \quad (78)$$

Для моды с волновым числом k движение груза n определяется выражением

$$\psi_n(t) = A \sin nka \cos [\omega(k)t + \varphi], \quad (79)$$

где k может принимать N различных значений:

$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \quad \dots, \quad k_N L = N\pi. \quad (80)$$

Закон дисперсии для этого случая имеет тот же вид, что и на рис. 2.13.

Сосредоточенные и распределенные параметры. При изучении поперечных колебаний струны с грузами мы совершили предельный переход к непрерывной струне, устремляя a (расстояние между двумя соседними грузами) к нулю (при неизменной длине L). Когда отношение a/λ настолько мало, что становится пригодным непрерывное приближение, можно использовать другую физическую модель такой системы. Вместо того, чтобы устремлять a к нулю, имея дело с моделью, составленной из невесомых пружин, чередующихся с точечными массами, можно равномерно распределить массу вдоль пружины. В этом случае уже не будет сосредоточенных масс и невесомых пружин. Вместо этого у нас есть одна длинная пружина с распределенной вдоль нее массой. Хорошим примером такой модели может служить «пружина». Элементом повторяющейся длины a здесь будет шаг одного витка спиральной пружины. Параметрами M и K являются соответственно масса и коэффициент жесткости одного витка. Если у нас N витков (теперь N — это уже не число степеней свободы), то полная масса равна NM , а коэффициент жесткости для всей пружины (т. е. для пружины длиной $L = Na$) равен K/N . (Коэффициент жесткости пружины, составленной из двух последовательно соединенных пружин, равен половине коэффициента жесткости составных пружин).

Вместо того, чтобы иметь дело с длиной a (шаг одного витка), мы можем оперировать с величиной $M/a = \rho_0$, представляющей собой плотность распределения массы. Аналогично, коэффициент жесткости одного витка пружины K можно заменить величиной, характеризующей материал пружины и ее конструкцию. Такой величиной является отношение K^{-1}/a . Это видно из следующего. Для пружины длиной $L = Na$ коэффициент K_L в N раз меньше K :

$$K_L = \frac{1}{N} K = \frac{a}{L} K. \quad (81)$$

Таким образом, справедливо равенство

$$K_L \cdot L = Ka.$$

Отсюда видно, что произведение Ka характеризует «пружинистость» материала и не зависит от длины пружины. Последнее равенство

можно переписать следующим образом:

$$\frac{K^{-1}}{a} = \frac{KL^{-1}}{L}, \quad (82)$$

из которого также видно, что отношение величины, обратной коэффициенту жесткости пружины, к длине пружины есть величина постоянная.

Пример 3. «Пружина»*). «Пружина» представляет собой спиральную пружину, имеющую примерно $N \approx 100$ витков (рис. 2.15). Диаметр каждого витка около 7 см, а длина «пружины» в нерастянутом состоянии близка к 6 см. При растяжении до длины L в несколько метров такая «пружина» очень хорошо удовлетворяет приближению «пружины». Соответствующая длина повторения a определяется длиной, приходящейся на один оборот, т. е. отношением $a = L/N$. Если коэффициент жесткости пружины для одного витка K , то K^{-1}/a не зависит от длины L . (Считается, что масса распределена, а не сконцентрирована между интервалами длины a .) Дисперсионное соотношение для случая продольных колебаний получается путем предельного перехода от уравнения (78) к непрерывной системе:

$$\begin{aligned} \omega(k) &= 2 \sqrt{\frac{K}{M}} \sin \frac{ka}{2} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{K}{M}} \left[\frac{ka}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{ka}{2} \right)^3 + \dots \right] \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{Ka^2}{M}} k = \sqrt{\frac{Ka}{M/a}} k. \end{aligned} \quad (83)$$

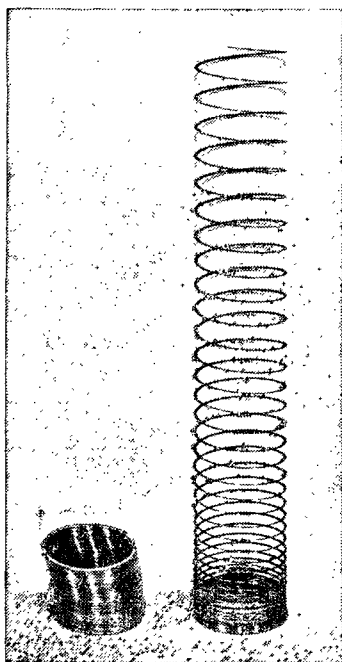


Рис. 2.15. «Пружина», лежащая на столе в сжатом и слегка растянутом состояниях.

Дисперсионное соотношение для поперечных колебаний [см. равенство (75)]:

$$\omega(k) \approx \sqrt{\frac{T_0}{M/a}} k \approx \sqrt{\frac{Ka}{M/a}} k, \quad (84)$$

так как $T_0 = K/a$ в приближении «пружины». Таким образом, дисперсионное соотношение для продольных и поперечных колебаний «пружины» одно и то же. Поэтому, если граничные условия одинаковы (например, оба конца закреплены), то моды колебаний

*) См. сноску на стр. 24.

относительно x , y и z имеют одинаковую последовательность волновых чисел и частот.

Убедитесь сами в том, что продольные и поперечные моды имеют одинаковые частоты. Усиленно рекомендуем проделать домашние опыты, в которых участвуют «пружины». Это поможет понять свойства волн.

Пример 4. LC-цепочка. Рассмотрим последовательность связанных емкостей и индуктивностей, показанную на рис. 2.16. С помощью рис. 2.16, б (вспомним случай $N=2$, п. 1.4) легко показать, что э. д. с., действующая на n -ю индуктивность, равна

$$L \frac{dI_n}{dt} = -C^{-1}Q' + C^{-1}Q.$$

Тогда

$$L \frac{d^2 I_n}{dt^2} = -C^{-1} \frac{dQ'}{dt} + C^{-1} \frac{dQ}{dt}.$$

Используя закон сохранения заряда для исключения dQ'/dt и dQ/dt , этому уравнению можно придать вид

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 I_n}{dt^2} &= -C^{-1} [I_n - I_{n+1}] + C^{-1} [I_{n-1} - I_n] = \\ &= C^{-1} [I_{n+1} - I_n] - C^{-1} [I_n - I_{n-1}]. \end{aligned} \quad (85)$$

Уравнение (85) имеет ту же форму, что и уравнение (77) для продольных колебаний системы из связанных масс и пружин. Поэтому, не заботясь пока о граничных условиях, мы можем записать дисперсионное соотношение и общее решение для токов в индуктивностях. Дисперсионное соотношение получается заменой K/M на C^{-1}/L в уравнении (78):

$$\omega(k) = 2 \sqrt{\frac{C^{-1}}{L}} \sin \frac{ka}{2}. \quad (86)$$

Общее решение уравнения (85) для отдельной моды без учета граничных условий имеет вид

$$I_n(t) = [A \sin nka + B \cos nka] \cos [\omega(k)t + \varphi], \quad (87)$$

где константы A и B и последовательность значений k , соответствующих разным модам, зависят от граничных условий на концах системы.

Физический смысл ka . Вы могли заметить, что в уравнение (85) не входит расстояние a . На рис. 2.16 мы условно показали это расстояние, понимая, однако, что поведение схемы не может зависеть от ее пространственной конфигурации. Что же следует понимать под величиной ka в дисперсионном соотношении и в уравнениях (86) и (87)? Когда понятие длины по оси z имело физический смысл, например для колебаний струны, величина k имела смысл изменения, на единицу длины по оси z , фазы функции $A \sin kz + B \cos kz$, определяющей форму моды. В случае системы с сосредоточенными параметрами, например для струны с грузами, мы пишем $z=na$, где $n=1, 2, \dots$ — номер груза. В этом случае величина ka представляет собой про-

изведение числа радиан фазы, приходящихся на единицу длины, на расстояние a между грузами. Таким образом, ka — это число радиан, на которое возрастает фаза при переходе от груза n к грузу $n+1$. В случае системы с сосредоточенными емкостями и индуктивностями величина ka также равна возрастанию фазы у функции $A \sin nka + B \cos nka$ при переходе от одной индуктивности к соседней. Мы можем в этом случае обозначить ka , например, через θ . Однако в такой, несколько абстрактной, записи исчезает математическая симметрия механических и электрических примеров, поэтому

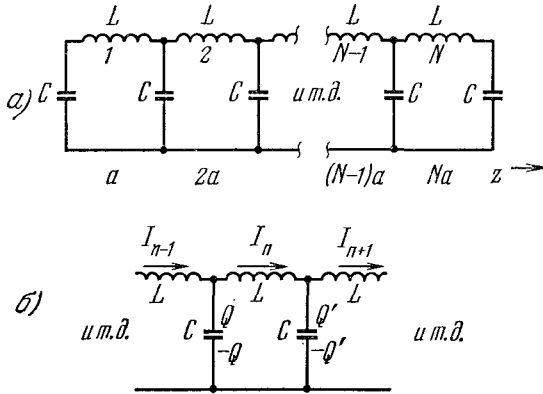


Рис. 2.16. Цепочка из связанных индуктивностей и емкостей. а) Параметры; б) токи и заряды в n -й ячейке в общем случае.

мы будем условно считать, что «расстояние» между индуктивностями равно a .

Другие формы дисперсионных соотношений. Обратите внимание, что у всех рассмотренных нами систем с сосредоточенными параметрами один и тот же закон дисперсии:

$$\omega(k) = \omega_{\max} \sin \frac{ka}{2}. \quad (88)$$

График этой зависимости показан на рис. 2.13. Частота ω_{\max} представляет собой константу, характеризующую данную физическую систему. Причина такой универсальности написанного соотношения в том, что у всех рассмотренных систем возвращающая сила, действующая на массу (или индуктивность), является результатом связи массы с соседними массами и пропорциональна относительному смещению масс. Существует, однако, много других интересных и важных форм дисперсионных соотношений. Например, имеются системы, у которых возвращающая сила, действующая на движущийся элемент, имеет две независимые компоненты. Одна компонента возникает из-за связи данного элемента с подобными соседними движущимися элементами. Для этой компоненты дисперсионное соотношение имело бы вид (88). Вторая компонента возникает из-за связи с некоторой «внешней» силой. Вклад этой компоненты зависит

только от смещения движущегося элемента относительно положения равновесия, а не от смещения относительно соседних элементов. Если бы движение вызывалось только этой силой, то движущиеся элементы не были бы связаны, а их смещения были бы нормальными координатами системы. Такая система рассмотрена в следующем примере.

Пример 5. Связанные маятники. Система показана на рис. 2.17. На каждую массу действуют возвращающие силы двух типов.

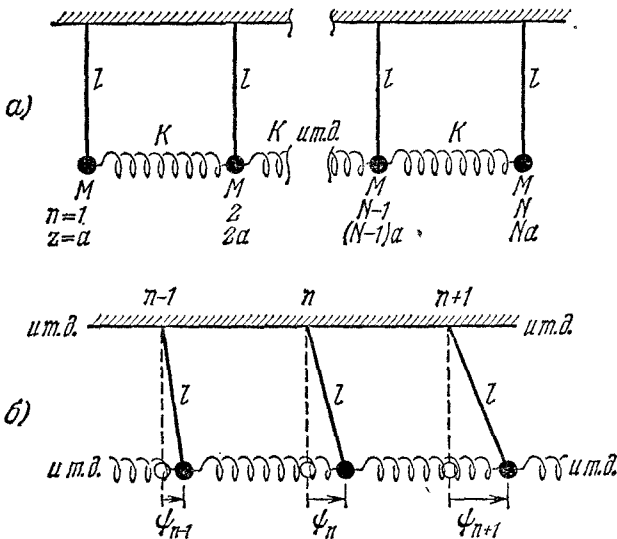


Рис. 2.17. Связанные маятники.

а) Равновесное положение; б) общий случай.

«Внешняя» сила (она создается силой тяжести) пропорциональна смещению массы от положения равновесия и не зависит от относительного смещения масс. Вторая сила возникает из-за того, что массы связаны между собой пружинами, и зависит только от взаимного расположения масс. Попробуем угадать дисперсионное соотношение для такой системы. Если бы мы имели только связанные пружинами массы (т. е. если бы g равнялось нулю), дисперсионное соотношение отвечало бы случаю продольных колебаний связанных масс, а возвращающая сила на единицу длины и единицу массы (т. е. величина ω^2) была бы равна

$$\omega^2 = 4 \frac{K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2} \quad (\text{если } g = 0). \quad (89)$$

Теперь предположим, что (при $g=0$) происходят колебания, соответствующие какой-то моде, форма которой определяется значением k , а величина k в свою очередь определяется из граничных условий. Вообразим, что, используя «ручку управления гравитацией», мы

можем постепенно включать силу тяжести, увеличивая g от нуля до конечного значения (980 см/сек^2). (Можно придумать и более реальный способ включения силы тяжести. Как это сделать?)

Если мы увеличим g от нуля до очень малого значения g' , то вклад в возвращающую силу ω^2 для каждой массы будет одинаков и равен g'/l . Это означает, что массы будут продолжать колебаться с той же геометрией моды, с тем же значением k , с той же линейной комбинацией $\sin kx$ и $\cos kx$, но колебания будут совершаться немного быстрее. Это можно объяснить следующим образом. При $g=0$ на все массы действовала одна и та же возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы. Включив g' , мы прибавим к уже имевшемуся значению ω^2 одну и ту же величину g'/l . Поэтому мода колебаний сохранится, но произойдет увеличение ω^2 . Включая g постепенно, мы предотвратим перемешивание мод и сохраним их форму. Длина волн также не изменится по сравнению со случаем $g=0$, а полная возвращающая сила на единицу массы и единицу смещения будет равна

$$\omega^2(k) = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (90)$$

Если эти рассуждения, которые привели к формуле (90), не кажутся убедительными, то посмотрите задачу 2.26. Там вы найдете уравнение движения для n -й массы, докажете справедливость уравнения (90) и найдете формы мод. (Уже сейчас можно сказать, что для граничных условий рис. 2.17 первой моде отвечает $k=0$.)

Мы встретимся со многими примерами, когда закон дисперсии имеет вид (90). Его можно переписать в более общем виде:

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + \omega_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (91)$$

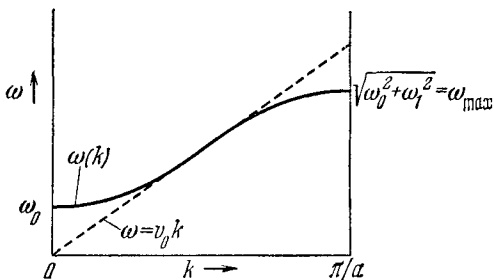


Рис. 2.18. Дисперсионное соотношение для связанных маятников.

Совершая предельный переход к непрерывной системе (когда $ka \ll 1$), имеем

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + v_0^2 k^2, \quad (92)$$

где v_0^2 — постоянная, равная $\omega_1^2 a^2 / 4$.

Закон дисперсии в форме (92) встретится нам при изучении распространения электромагнитных волн в волноводе и в ионосфере Земли. (Таков же закон дисперсии и для релятивистских волн де Бройля при квантовом описании частиц). Уравнение (91) изображено графически на рис. 2.18.

Пример 6. Колебания плазмы. Этот интересный пример приводит к тому же дисперсионному соотношению, что и пример

со связанными маятниками. В главе 4 мы выведем дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в ионосфере Земли, которое имеет вид, аналогичный выражению (92):

$$\omega^2(k) = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (93)$$

где c — скорость света, а ω_p — так называемая частота колебаний плазмы, определяемая из равенства

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}. \quad (94)$$

Здесь N — плотность числа электронов (в электронах на $см^3$), e — заряд, а m — масса электрона.

Из рис. 2.18 следует, что самая низкая мода для системы, описываемой равенствами (91) или (92), — это мода с $k=0$, т. е. с длиной волны, равной бесконечности. В этом случае все маятники будут колебаться с частотой $\omega^2 = g/l$ и одинаковой амплитудой и фазой. В настоящем примере самая низкая мода соответствует колебаниям плазмы с частотой ω_p , что видно из уравнения (93), если положить $k=0$. Мы рассмотрим эту моду и выведем уравнение (94).

Нейтральная плазма состоит из нейтральных и ионизованных молекул газа. При однократной ионизации молекулы образуется положительный ион и свободный электрон. Земная ионосфера представляет собой слой воздуха (в действительности несколько слоев с различными свойствами), в котором находится много ионизованных молекул (молекулы азота N_2 и кислорода O_2). Молекулы воздуха обычно ионизируются при поглощении ультрафиолетового излучения Солнца. В земной атмосфере плотность ионов и электронов имеет максимум на расстояниях около $200 \div 400$ км от земной поверхности. В более высоких слоях атмосферы плотность электронов (и ионов) уменьшается из-за уменьшения числа молекул воздуха. В низких слоях атмосферы плотность электронов мала из-за того, что ультрафиолетовое излучение сюда не доходит.

Так как плазма нейтральна (в среднем), то она не является источником внешнего электростатического поля. Однако одна область плазмы может получить избыток заряда за счет его нехватки в другой, соседней, области. Это создает электрическое поле в плазме. Под действием электрического поля ионы ускоряются в одном направлении (т. е. вдоль поля), а электроны — в противоположном. Заряды движутся таким образом, чтобы уничтожить избыток и нехватку заряда, вызвавшие поле. Такова причина возникновения возвращающей силы. К тому времени, когда избыточный заряд будет уничтожен, ионы и электроны приобретут определенные скорости. Инерция заставит их проскочить через положение равновесия, и мы получим новые области избытка и недостатка заряда, противоположные по знаку первоначальным. Таким образом, здесь существует механизм, который поддерживает колебания, после того как они возбуждены.

Если нас интересует только движение заряда из одной области в другую, мы можем забыть о положительных ионах и считать, что

полное перемещение заряда создается движением электронов. Действительно, в данном электрическом поле (одинаковом для любых частиц) ускорение электрона меньше ускорения иона на величину отношения их масс (около $3 \cdot 10^4$), и смещением ионов можно пренебречь.

Рассмотрим упрощенную ситуацию, когда плазма находится между ограничивающими стенками (рис. 2.19). Пренебрежем движением ионов по сравнению с движением электронов. В любой момент времени у одной стенки может быть избыток заряда, — соответственно его недостаток у другой. Это создает пространственно однородное электрическое поле в плазме (том II, п. 3.5), определяемое как

$$E_x = -4\pi \frac{Q}{A}, \quad (95)$$

где A — площадь стенок, а знак минус указывает на то, что электрическое поле E_x стремится уничтожить избыток заряда Q . Других источников электрического поля нет. (Плазма между стенками нейтральна, так как каждый электрон, движущийся вправо из данного объема, заменяется другим, входящим в него слева.) Второй закон Ньютона для каждого электрона с массой m и зарядом q имеет вид

$$\frac{m d^2 x}{dt^2} = q E_x. \quad (96)$$

(Мы пренебрегаем другими силами, действующими на электрон, которые появляются из-за столкновений электронов и ионов; в среднем эти силы равны нулю и не оказывают влияния на перенос заряда.)

Теперь предположим, что в 1 см^3 содержится N электронов и каждый электрон смещен на расстояние x от положения равновесия. Полный заряд на одной стенке («отобранный» от другой стенки) равен

$$Q = Nq Ax. \quad (97)$$

Дифференцируя уравнение (97) дважды по времени и используя уравнения (96) и (95), получим

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{4\pi Nq^2}{m} Q. \quad (98)$$

Решение этого уравнения

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$\omega^2 = \frac{4\pi N e^2}{m} \equiv \omega_p^2. \quad (99)$$

Величина ω_p называется частотой колебаний плазмы или критической частотой.

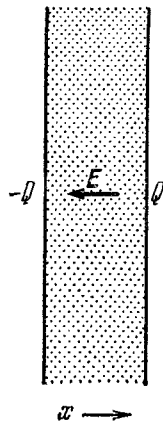


Рис. 2.19. Колебания в ограниченной плазме.

Плотность свободных электронов в ионосфере изменяется с высотой и временем суток. Рекомбинация электронов и ионов в нейтральные молекулы начинается после заката Солнца, когда образование новых ионов приостанавливается. Поэтому плотность электронов ночью уменьшается. Для дневного времени типичное значение частоты колебаний плазмы равно

$$\nu_p = 10 \div 30 \text{ МГц}, \quad (100)$$

что соответствует плотности электронов $N \approx 10^6 \div 10^7$ электронов/см³.

Пример из квантовой физики. Гипотеза де Бройля приписывает частице с импульсом p волновое число k , определяемое из равенства $p = \hbar k$. «Боровское условие частот» утверждает, что частица с энергией E имеет волновую частоту ω , определяемую равенством $E = \hbar \omega$. Объединив оба эти утверждения, можно найти дисперсионное соотношение между ω и k для частиц. Оно следует из связи между E и p . В дополнении 2 разобраны соответствующие примеры.

Задачи и домашние опыты

2.1. Опыт. Зависимость частоты колебаний «пружинь» от ее длины. Возьмите левой рукой первый виток «пружинь», а правой — последний. Расстояние между руками должно быть около 1 м. Измерьте частоту вертикальных поперечных колебаний. (Не беспокойтесь о том, что «пружина» сильно провисла.) Теперь растяните «пружину» как можно больше. Измерьте частоту. Далее, закрепите как-нибудь оба конца «пружинь», чтобы полная ее длина равнялась 2,5—3 м. Измерьте частоту. Объясните результаты. Используйте эти результаты измерения частоты, чтобы определить коэффициент упругости «пружинь», приходящийся на один виток. Пусть N_0 — полное число витков «пружинь». Закрепите пружину таким образом, чтобы свободными были N из N_0 витков. Перед опытом предскажите зависимость частоты от N/N_0 . Затем сделайте опыт, проверьте предсказание.

2.2. Опыт. «Пружина» как непрерывная система. Привяжите концы растянутой до 2,5—3 м «пружинь» к неподвижным предметам. Не беспокойтесь о провисании «пружинь». Возбудите первую моду колебаний в каждом из поперечных направлений. Измерьте частоты этих двух мод. Возбудите также первые моды продольных колебаний и измерьте их частоту. (Есть два хороших способа возбудить желаемую моду. Первый заключается в том, чтобы придать «пружине» соответствующую форму и затем отпустить, а второй — в том, чтобы слегка трясти «пружину» с нужной частотой, взявшись за нее около одного из концов, и, возбудив достаточную амплитуду колебаний, отпустить «пружину». Используйте оба метода.) Затем подумайте, как возбудить вторую моду, для которой длина L равна двум полуволнам. Сделайте это для всех трех направлений: x , y и z . Измерьте частоты. При некотором навыке вы смогли бы возбудить третьи моды.

Теперь возбудите первую моду вертикальных колебаний и одновременно вторую продольную моду. (Это легко можно сделать при соответствующих условиях). Посмотрите на систему и измерьте частоту биений между продольной (второй) модой и в два раза более низкой вертикальной модой. При некоторой практике это легко сделать. Это хороший способ убедиться, что основная и первая «октавы» отличаются по частоте в два раза. Точно так же вы легко можете одновременно возбудить самую низкую вертикальную моду и вторую горизонтальную моду.

2.3. Нулевые измерения. Прочтите опыт 2.2 (для выполнения этой задачи вы можете его и не делать). Предположим, что вы определяете частоту колебаний в «пружине», считая число циклов колебаний за 10 сек и затем деля число циклов на время. Предположим далее, что вы можете читать показания часов с точностью