

Плотность свободных электронов в ионосфере изменяется с высотой и временем суток. Рекомбинация электронов и ионов в нейтральные молекулы начинается после заката Солнца, когда образование новых ионов приостанавливается. Поэтому плотность электронов ночью уменьшается. Для дневного времени типичное значение частоты колебаний плазмы равно

$$\nu_p = 10 \div 30 \text{ МГц}, \quad (100)$$

что соответствует плотности электронов  $N \approx 10^6 \div 10^7$  электронов/см<sup>3</sup>.

**Пример из квантовой физики.** Гипотеза де Бройля приписывает частице с импульсом  $p$  волновое число  $k$ , определяемое из равенства  $p = \hbar k$ . «Боровское условие частот» утверждает, что частица с энергией  $E$  имеет волновую частоту  $\omega$ , определяемую равенством  $E = \hbar \omega$ . Объединив оба эти утверждения, можно найти дисперсионное соотношение между  $\omega$  и  $k$  для частиц. Оно следует из связи между  $E$  и  $p$ . В дополнении 2 разобраны соответствующие примеры.

### Задачи и домашние опыты

**2.1. Опыт. Зависимость частоты колебаний «пружинь» от ее длины.** Возьмите левой рукой первый виток «пружинь», а правой — последний. Расстояние между руками должно быть около 1 м. Измерьте частоту вертикальных поперечных колебаний. (Не беспокойтесь о том, что «пружина» сильно провисла.) Теперь растяните «пружину» как можно больше. Измерьте частоту. Далее, закрепите как-нибудь оба конца «пружинь», чтобы полная ее длина равнялась 2,5—3 м. Измерьте частоту. Объясните результаты. Используйте эти результаты измерения частоты, чтобы определить коэффициент упругости «пружинь», приходящийся на один виток. Пусть  $N_0$  — полное число витков «пружинь». Закрепите пружину таким образом, чтобы свободными были  $N$  из  $N_0$  витков. Перед опытом предскажите зависимость частоты от  $N/N_0$ . Затем сделайте опыт, проверьте предсказание.

**2.2. Опыт. «Пружина» как непрерывная система.** Привяжите концы растянутой до 2,5—3 м «пружинь» к неподвижным предметам. Не беспокойтесь о провисании «пружинь». Возбудите первую моду колебаний в каждом из поперечных направлений. Измерьте частоты этих двух мод. Возбудите также первые моды продольных колебаний и измерьте их частоту. (Есть два хороших способа возбудить желаемую моду. Первый заключается в том, чтобы придать «пружине» соответствующую форму и затем отпустить, а второй — в том, чтобы слегка трясти «пружину» с нужной частотой, взявшись за нее около одного из концов, и, возбудив достаточную амплитуду колебаний, отпустить «пружину». Используйте оба метода.) Затем подумайте, как возбудить вторую моду, для которой длина  $L$  равна двум полуволнам. Сделайте это для всех трех направлений:  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Измерьте частоты. При некотором навыке вы смогли бы возбудить третьи моды.

Теперь возбудите первую моду вертикальных колебаний и одновременно вторую продольную моду. (Это легко можно сделать при соответствующих условиях). Посмотрите на систему и измерьте частоту биений между продольной (второй) модой и в два раза более низкой вертикальной модой. При некоторой практике это легко сделать. Это хороший способ убедиться, что основная и первая «октавы» отличаются по частоте в два раза. Точно так же вы легко можете одновременно возбудить самую низкую вертикальную моду и вторую горизонтальную моду.

**2.3. Нулевые измерения.** Прочтите опыт 2.2 (для выполнения этой задачи вы можете его и не делать). Предположим, что вы определяете частоту колебаний в «пружине», считая число циклов колебаний за 10 сек и затем деля число циклов на время. Предположим далее, что вы можете читать показания часов с точностью

$\pm 1$  сек, а определять число полных циклов с точностью  $\pm 1/4$  цикла. Частота самой низкой моды  $\nu_1$  около 1 гц. Частота  $\nu_2$  второй моды около 2 гц.

а) Оцените грубо, с какой точностью ваши измерения могут определить величины  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . (Ответ нужно дать в виде « $\nu_1 = 1,0 \pm 0,1$ ,  $\nu_2 = 2,0 \pm 0,2$ ».)

б) Теперь предположим, что вы одновременно возбуждаете обе моды и измеряете частоту биений между  $2\nu_1$  и  $\nu_2$ , как описано в опыте 2.2. Это можно сделать, наблюдая за биениями в течение 10 сек, т. е. в течение 10 циклов  $\nu_1$ . Предположим, что за это время вы не зарегистрировали биения между  $2\nu_1$  и  $\nu_2$  с точностью  $1/4$  биения. Таким образом, ваш экспериментальный результат:  $\nu_2 - 2\nu_1 = 0$ . Чему равна экспериментальная точность? (Дайте ответ, например в виде « $\nu_2 - 2\nu_1 = 0 \pm 0,10\nu_1$ »). Чему равна точность при оценке величины  $\nu_2 - 2\nu_1$  (представленная в таком же виде), полученная из результатов независимых измерений  $\nu_2$  и  $\nu_1$ , сделанных в пункте а)? Видите ли вы экспериментальные преимущества в методе счета биений? Объясните преимущества этого метода и метода нулевых измерений в других возможных случаях.

2.4. Опыт. *Тембр «звука», издаваемого «пружиной».* Тембр звука музыкального инструмента зависит от того, какие гармоники возбуждены. [Например, в кларнете почти отсутствуют четные гармоники и присутствуют лишь частоты  $\nu_1$ ,  $3\nu_1$ ,  $5\nu_1$  и т. д.] Возбудите «пружину», подвешенную так, как указано в опыте 2.2, резко толкнув ее рукой в середине. Попробуйте сделать это при толчках различной резкости. Можно заметить, что четные гармоники не возбуждаются, и чем более импульсный характер носит возбуждение, тем больше число возбуждаемых нечетных мод. Как возбудить только четные моды? Попробуйте щипать струну гитары или рояля в различных местах — посередине, около конца — и послушайте, есть ли разница в тембре звука.

2.5. Опыт. *Рояль как анализатор Фурье; нечувствительность уха к фазе колебаний.* Нажмите на демпфирующую педаль рояля. Крикните «эй» в направлении струны рояля. Слушайте. Крикните «оу». Попробуйте все гласные. Струны рояля производят фурье-анализ голоса. Обратите внимание на гласный звук, длящийся несколько секунд. Существенно ли для вашего уха знание относительной фазы компонент Фурье, производящих звук?

2.6. Опыт. *Гармоники рояля; равномерно темперированный строй.* В справочниках физических констант можно найти таблицы исходных тонов для трех общепринятых музыкальных строев: американского равномерно темперированного хроматического строя (стандартный тон А440), международного равномерно темперированного хроматического строя (стандартный тон А435) и диатонического, или чистого, строя (построен на тоне С256, что дает тон А426,67).

Начнем с диатонического строя. В этом строе за единицу частоты  $\nu = 1$  принята частота в 256 гц. Гармоники этой исходной ноты равны  $\nu = 2, 3, 4$  и т. д., а субгармоники равны  $1/2, 1/3, 1/4$  и т. д. Нота С средней октавы рояля \*) соответствует С256 (если рояль так настроен) и обозначается  $C_4$ . (Индекс означает октаву. Он возрастает на единицу при переходе к следующей, более высокой, октаве.) Предположим, что для струн рояля точно выполняется дисперсионный закон «непрерывной идеально упругой струны». Тогда моды данной струны будут представлять собой гармоническую последовательность  $\nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1$  и т. д.

Приведем обозначения и частоты первых 16 гармоник струны  $C_4$ , а также первых двух субгармоник (мы подчеркнули гармонику  $C_4$  и ее октавы):

Обозначение	F <sub>3</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	G <sub>5</sub>	C <sub>6</sub>	E <sub>6</sub>	G <sub>6</sub>	B <sub>b6</sub>	C <sub>7</sub>	D <sub>7</sub>	E <sub>7</sub>	F <sub>#7</sub>	G <sub>7</sub>	G <sub>#7</sub>	B <sub>b7</sub>	B <sub>7</sub>	C <sub>8</sub>
$\nu$	1/3	<u>1/2</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	3	<u>4</u>	5	6	7	<u>8</u>	9	10	11	12	13	14	15	<u>16</u>

При повышении любого тона на октаву частота колебаний удваивается (сравните G<sub>6</sub> и G<sub>7</sub>, C<sub>4</sub> и C<sub>5</sub> и т. п.). Теперь, умножая частоту C<sub>4</sub> на соответствующие

\*) Музыканты называют ее первой октавой. (Прим. ред.)

множители, лежащие между 1 и 2, мы образуем следующую гамму внутри отдельной октавы, например, между  $C_4$  и  $C_5$ :

Обозначение	C до	D ре	E ми	F фа	G соль	A ля	B си	C до
v	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Мы получили научную, или чистую диатоническую, С-мажорную гамму (диатоническая гамма соответствует белым клавишам рояля). Обратите внимание на ноту А426,67. Она равна  $\frac{5}{4}F$ . Нота С в этой гамме называется *ключом* или *тоникой*.

Наименьший музыкальный интервал в диатонической гамме называется *диатоническим полутоном* или *малой секундой*. Отношение частот для этого интервала равно  $F/E = C/B = 16/15 = 1,067$ . Следующие, большие, частотные интервалы называются *тонами* или *большими секундами*. Имеется два типа больших секунд:

$$\frac{D}{C} = \frac{G}{F} = \frac{B}{A} = \frac{9}{8} = 1,125 \quad \text{и} \quad \frac{E}{D} = \frac{A}{G} = \frac{10}{9} = 1,111.$$

Имеется также два типа музыкальных интервалов, так называемых *малых терций*:

$$\frac{E}{D} = \frac{32}{27} = 1,185 \quad \text{и} \quad \frac{G}{F} = \frac{G}{A} = \frac{6}{5} = 1,200,$$

и еще *большая терция*:

$$\frac{E}{C} = \frac{A}{F} = \frac{B}{G} = \frac{5}{4} = 1,250.$$

Теперь возникают некоторые «музыкальные» трудности. Предположим, что, сочиняя музыку с помощью рояля, имеющего диатонический строй, мы решили изменить ключ, т. е. перейти к диатонической гамме с другой тоникой, например из С-мажорной гаммы в D-мажорную, и иметь ту же шкалу, т. е. те же отношения частот, что и раньше. Таким образом, мы хотим, чтобы отношение частот  $E/D$  в новой гамме было равно отношению  $D/C$  в старой, т. е. большой секунде  $9/8 = 1,125$ . К сожалению, мы не можем использовать ту струну E, которая уже имеется, так как при этом отношение  $E/D = 10/9 = 1,111$ , а не 1,125. Таким образом, нам необходима новая струна  $E'$ , для которой отношение  $E'/D = 1,125$ , но при этом  $E'/C = (1,125)(D/C) = 1,265$ , в то время как  $E/C = 1,250$ .

Для следующей ноты после  $E'$  также понадобится новая струна, обозначаемая  $F_{\#}$ . Для нее должно выполняться равенство  $F_{\#}/D = E'/C$ , т. е.  $F_{\#}/C = (5/4)(9/8) = 1,407$ . Обратите внимание на то, что у рояля появился новый полутон:  $F_{\#}/F = 1,0555$ . По мере заполнения шкалы придется добавлять новые ноты, и ситуация будет становиться хуже и хуже, так как понадобятся все новые и новые струны. Этим затруднений легко избежать с помощью равномерно темперированного строя, который содержит частоты, равноудаленные в логарифмическом масштабе. В этом строе октава разделена на 12 малых секунд (полутонов); этим музыкальным интервалам соответствует отношение частот  $2^{1/12} = 1,059$ . Большим секундам (т. е. двум полутонам) соответствует отношение частот  $2^{2/12} = 1,122$ ; малым терциями — отношение  $2^{3/12}$  и т. д. Ни один из этих интервалов (за исключением октавы) не совпадает точно с интервалами диатонического строя, но они близки к точным значениям интервалов этого строя, построенных от любой ноты, взятой в качестве тоники.

Сделайте следующие опыты

1. Нажмите одну из клавиш рояля, например  $B_{\flat 6}$ , так, чтобы соответствующая струна не зазвучала (т. е. очень нежно). Теперь резко возбудите одну из

низких нот, подержите клавишу несколько секунд и отпустите (погасив тем самым колебания этой струны). Если теперь струна  $V_{b6}$  звучит громче, то это значит, что она возбудилась одной из гармоник, присутствующих в модах (конфигурации низкой ноты). Попробуйте добиться результата, перебрав разные низкие ноты. Нота октавой ниже также должна хорошо возбуждать колебания открытой струны (струны  $V_{b6}$  в нашем случае). Этот опыт можно также сделать, имея несколько одновременно открытых струн, которые можно пытаться возбудить более низкой нотой. Когда вы найдете ноту, которая возбуждается этим способом, попробуйте возбудить соседнюю ноту, отстоящую от первой на интервал малая секунда. Удается ли это сделать?

2. Теперь, наоборот, тихо возбудите низкую ноту и резко — более высокую. Если более высокая нота является одним из обертонов низкой струны, то вы будете возбуждать в низкой струне этот обертон, не возбуждая основную моду. Таким образом, вы сможете услышать, как звучат гармоники низкой струны, когда они не заглушены громким основным тоном.

3. Используйте метод, описанный в 2, чтобы услышать, как звучат первые 6 или 7 гармоник  $C_4$  (или более низкого  $C$ ). Затем подумайте, как можно услышать отдельную гармонику в общем звучании струны, когда клавиша, соответствующая нижней струне (нижняя клавиша), ударяется обычным образом. Например, подумайте, как услышать 7-ю гармонику  $V_{b6}$ , когда ударяется  $C_4$ . Освободите струну  $C_4$  и резко ударьте  $V_{b6}$ . Таким образом вы узнаете, как звучит 7-я гармоника струны  $C_4$ . Затем, пока этот звук еще в вашей памяти, ударьте  $C_4$  и постарайтесь уловить в звуке (в котором преобладает нота  $C_4$ ) ноту  $V_{b6}$ . Обратите внимание на то, что частота этой ноты, когда она возникает как 7-я гармоника  $C_4$ , т. е. появляется при полном звучании струны  $C_4$ , не будет точно такой, как частота основной ноты струны  $V_{b6}$ . Однако эти частоты будут достаточно близки. [Так происходит потому, что струна  $V_{b6}$  после возбуждения сразу же глушится, а струна  $C_4$  через несколько секунд «забывает», как она была возбуждена, и колеблется со своей собственной (7-я гармоника) частотой.] Таким образом, ее звучание будет несколько отлично от звучания возбуждающей ноты. (Конечно, если рояль расстроен, то звуки будут совершенно различными.) Вследствие этого небольшого различия по частоте вы сможете услышать биения. Для этого сделайте следующее:

4. Освободите (бесшумно) струну  $C_4$ . Резко ударьте  $C_5$ . Это приведет к возбуждению второй моды струны  $C_4$ . Теперь, прежде чем затухнет вторая гармоника  $C_4$ , приглушите  $C_5$  и затем опять ударьте  $C_5$ , но не очень сильно, так, чтобы согласовать громкость  $C_5$  с громкостью еще звучащей второй гармоники  $C_4$ . Слушайте биения. (Этот опыт получается не одинаково хорошо на разных роялях. Его нужно делать в тихой комнате.)

5. Самые низкие две ноты рояля — это ноты  $A_0$  27,5 и  $A_{\#0}$  29,1. Таким образом, частота их биений, которую легко обнаружить, равна 1,6 *гц*. Возбудите одновременно несильным ударом обе ноты. Когда вам покажется, что вы слышите биения, отпустите одну клавишу (но не обе). Исчезнут ли биения? (Настроен ли рояль?)

2.7. Почему идеальная непрерывная струна дает точно «гармоническое» отношение частот, а струна с грузами не дает? Рассмотрим струну с грузами, закрепленную на концах (грузов очень много, скажем 100). Мы можем считать эту струну практически непрерывной. Положим, что струна совершает колебания в самой низкой моде. В этом случае длина струны  $L$  равна половине длины волны. Теперь рассмотрим вторую моду. В этом случае  $L$  равно двум половинам волны, так что в каждой половине струны укладывается половина длины волны. Теперь сравним для второй моды колебаний 50 грузов в первой половине струны со 100 грузами, когда струна колеблется в первой моде. В обоих случаях грузы «выложены» по кривой, являющейся половиной синусоидальной волны. Сравним положение груза 1 (в моде 2) со средним положением грузов 1 и 2 (в моде 1), положение груза 2 (в моде 2) — с грузами 3 и 4 (в моде 1) и т. д. Таким образом, груз 17

В моде 2 имеет ту же амплитуду, что и средняя точка между грузами 33 и 34 в первой моде (если, конечно, амплитуды мод одинаковы). Но в моде 2 угол, который образует струна в месте расположения груза 17 с осью равновесного положения, в два раза больше соответствующего угла в месте расположения грузов 33 и 34 в моде 1 (используем приближенно малого угла). Таким образом, возвращающая сила на единицу смещения для грузов 17 во второй моде в два раза больше, чем для грузов 33 и 34 в первой. Кроме того, масса груза 17 равна половине массы двух грузов, 33 и 34. Таким образом, *возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и единицу массы, в четыре раза больше для груза 17 во второй моде, чем для комбинации грузов 33 и 34 в первой моде*. Мы получаем «в непрерывном приближении» (основанном на «большом числе» грузов), что  $\omega_2 = 2\omega_1$ .

*Этот вывод не будет справедлив в случае малого числа грузов*. Объясните, почему «гармонические» отношения  $\nu_2 = 2\nu_1$ ,  $\nu_3 = 3\nu_1$  и т.д. возникают в непрерывном пределе, но не в случае нескольких грузов, показанном, например, на рис. 2.12.

2.8. За какое время ваш вклад в банке удвоится, если годовой процент равен 5,9%? (У к а з а н и е. Рассмотрите равномерно темперированный строй, опыт 2.6.)

2.9. Закончите образование диатонической шкалы для D-мажора, начатое в опыте 2.6. Было найдено, что нужно добавить новую струну E, которую мы назвали E'. Наша первая «черная нота» была F $\sharp$ . Однако нам понадобится еще одна «черная нота» — C $\sharp$ . Что можно сказать про G, F, A и B? Можем ли мы использовать те, которые имеем, или нужно образовывать новые — G', F', A' и B'?

2.10. Выведите волновое уравнение (55) для неоднородной струны.

2.11. Получите выражение (47) для фурье-коэффициентов функции  $F(z)$ , показанной на рис. 2.6.

2.12. Найдите конфигурацию и частоты первых трех мод поперечных колебаний непрерывной струны с натяжением  $T_0$ , плотностью массы  $\rho_0$  и длиной  $L$  при граничных условиях, когда *оба конца свободны*. (Концы прикреплены к кольцам, скользящим без трения по стержням.) Покажите, что особенность самой низкой моды в том, что она имеет бесконечную длину волны и нулевую частоту. В этой моде струна перемещается так, что скорости всех ее точек одинаковы. (Это включает в себя также возможность нахождения струны в покое при произвольном смещении.)

2.13. Найдите конфигурацию и частоты трех мод поперечных колебаний однородной струны с грузами, имеющей три груза и четыре сегмента, если оба конца струны свободны. (Концы струны прикреплены к невесомым кольцам, скользящим без трения по стержням.) Сравните самую низкую моду с результатом задачи 2.12.

2.14. Рассмотрите LC-цепочку из трех индуктивностей и четырех емкостей, соединенных, как показано на рис. 2.16, для  $N \approx 3$ , если *две внешние емкости короткозамкнуты*. Найдите три моды, т. е. конфигурацию токов и частот. Сравните физический смысл, который имеет самая низкая мода в этой задаче и в задаче 2.13. Сравните граничные условия обеих задач.

2.15. Рассмотрите стальную струну рояля, которая дает C256 (диатонический строй). Плотность стали близка к  $9 \text{ г/см}^3$  (это не линейная плотность массы  $\rho_0$ . Почему?). Положим, что диаметр струны  $1/2 \text{ мм}$ , а ее длина  $100 \text{ см}$ . Чему равно натяжение струны в динах и в кг?

О т в е т.  $T_0 \approx 47 \text{ кг}$ .

2.16. Найдите смещение  $\psi(z, t)$  для «пружины», растянутой так, чтобы повторить функцию  $g(z)$ , определяемую уравнением (48). Нарисуйте  $\psi(z, t_0)$ , когда  $\omega_1 t_0 = \pi/3$ . Сравните форму  $\psi(z, t_0)$  с формой  $\psi(z, 0)$ , показанной на рис. 2.7.

2.17. Сравните натяжение стальной струны гитары с натяжением струны такой же длины, диаметра и тона (самой первой моды), но сделанной из жилы. Плотность стали около  $9 \text{ г/см}^3$ ; плотность жилы чуть больше  $1 \text{ г/см}^3$ . Будет ли в действительности диаметр стальной струны для гитары равен диаметру гитарной струны из жилы? Посмотрите на гитары и сравните. Оценив отношение диаметров, вычислите отношение натяжения струн в этих двух случаях.

2.18. Выведите классическое волновое уравнение (14) следующим способом. Начните с уравнения (62) и перейдите к непрерывному приближению. Замените индекс  $n$  на координату  $z$ , принимая во внимание, что расстояние между грузами равно  $a$ . Воспользуйтесь разложением правой части уравнения (62) в ряд Тейлора. Рассмотрите случай, когда в разложении имеется на один член больше, чем необходимо для получения классического волнового уравнения. Определите критерий, по которому можно пренебречь этим членом и членами более высокого порядка.

2.19. Покажите, что, рассматривая уравнение (71) как решение уравнения движения для поперечных колебаний струны с грузами (65), можно получить дисперсионное соотношение (70) независимо от выбора постоянных  $A$ ,  $B$  и  $k$ , определяемых только начальными и граничными условиями.

2.20. Используйте уравнения (73) и (70), чтобы получить отношения частот, показанные на рис. 2.12 для  $N=5$ .

2.21. Найдите конфигурации и частоты мод для поперечных колебаний струны с пятью грузами и одним закрепленным и другим свободным концами. Постройте пять соответствующих точек дисперсионного соотношения  $\omega(k)$  подобно тому, как это сделано на рис. 2.13.

2.22. Рассмотрев рис. 2.13, а также схему самой системы, покажите, каким образом можно добавить шесть точек к графику рис. 2.13, чтобы этот график определял моды для струны с 11 грузами, закрепленной на концах.

2.23. Покажите, что уравнения (73) и (74) дают те же результаты для частот при  $N=1$  и  $N=2$ , которые мы получили в пп. 1.2 и 1.4.

2.24. Нарисуйте пять мод струны с пятью грузами, соответствующих уравнениям (78) — (80).

2.25. Постройте график дисперсионного соотношения для системы, показанной на рис. 2.16.

2.26. Покажите, что для системы связанных маятников, показанных на рис. 2.17, уравнение движения для  $n$ -го маятника (в приближении малых колебаний) имеет вид

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\frac{g}{l}\psi_n + \frac{K}{M}\left(\frac{\psi_{n+1}-\psi_n}{a}\right) - \frac{K}{M}\left(\frac{\psi_n-\psi_{n-1}}{a}\right).$$

Покажите, что общее решение для моды без учета граничных условий имеет вид

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \varphi) [A \sin nka + B \cos nka].$$

Покажите, что дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}.$$

Покажите, что для граничных условий рис. 2.17 (т. е. когда крайние пружины не закреплены) приведенное выше решение имеет вид

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \varphi) B \cos nka,$$

когда  $n$ -й маятник расположен в точке  $z = (n-1/2)a$ . Покажите, что для первой моды  $k=0$ . Нарисуйте ее. Как будет вести себя система в такой конфигурации при постепенном уменьшении до нуля силы тяжести? Постройте конфигурацию трех мод для  $N=3$  и определите частоты.

2.27. Найдите систему из связанных емкостей и индуктивностей, которая была бы аналогом системы из связанных маятников рис. 2.17 в том смысле, что уравнение движения для тока в  $n$ -й индуктивности имело бы тот же вид, что уравнение движения для  $n$ -го маятника в задаче 2.26. Найдите дисперсионное соотношение.

2.28. Перейдите к непрерывному пределу в задаче со связанными маятниками (задача 2.26). Покажите, что в этом случае система описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega_0^2\psi + v_0^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

2.29. Докажите каждое из следующих утверждений двумя способами: а) «физическим» способом, основанным на использовании понятия нормальных мод

непрерывной струны с соответствующими граничными условиями, и б) способом фурье-анализа периодической функции от  $z$ :

1. Любая (разумная) функция  $f(z)$ , определенная между  $z=0$  и  $z=L$  и имеющая нулевое значение в  $z=0$  и нулевой наклон в  $z=L$ , может быть разложена в ряд Фурье вида

$$f(z) = \sum_n A_n \sin nk_1 z; \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots; \quad k_1 L = \pi/2.$$

(З а м е ч а н и е. Начните с построения из  $f(z)$  периодической функции, чтобы можно было использовать формулы фурье-анализа.)

2. Любая «разумная» функция  $f(z)$ , определенная между  $z=0$  и  $z=L$  и имеющая нулевой наклон в  $z=0$  и  $z=L$ , может быть представлена рядом Фурье вида

$$f(z) = B_0 + \sum_n B_n \cos nk_1 z; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots; \quad k_1 L = \pi.$$

3. Любая (разумная) функция  $f(z)$ , определенная между  $z=0$  и  $z=L$  и имеющая нулевой наклон в  $z=0$  и нулевое значение в  $z=L$ , может быть разложена в ряд Фурье вида

$$f(z) = \sum_n B_n \cos nk_1 z; \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots; \quad k_1 L = \pi/2.$$

### 2.30. Фурье-анализ периодически повторяющегося прямоугольного импульса.

Если периодически хлопать в ладоши, то звуковое давление воздуха на ухо может быть описано как периодически повторяющийся прямоугольный импульс. Пусть функция  $F(t)$  соответствует звуковому давлению. Положим, что  $F(t)$  равно  $\frac{1}{2}$  одной единице давления для короткого интервала  $\Delta t$  и нулю до и после интервала  $\Delta t$ . Этот «прямоугольный импульс» единичной высоты и шириной  $\Delta t$  периодически повторяется с периодом  $T_1$ . Короткий интервал  $\Delta t$  определяет длительность звучания хлопка. Период  $T_1$  — это время между двумя последовательными хлопками. Частота  $\nu_1 = T_1^{-1}$  является частотой хлопания. Выполните фурье-анализ заданной таким образом функции  $F(t)$ .

а) Покажите, что начало отсчета времени можно выбрать таким, что в разложении будут только косинусы аргумента  $n\omega_1 t$ , т. е.

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t.$$

б) Покажите, что  $B_0 = \Delta t/T_1$ . Покажите, что

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi\nu_1 \Delta t) \quad \text{для } n = 1, 2, \dots$$

в) Покажите, что для  $\Delta t \ll T_1$  «основной» тон  $\nu_1$  и первые гармоники  $2\nu_1$ ,  $3\nu_1$ ,  $4\nu_1$  и т. д. имеют практически одно и то же значение амплитуды  $B_n$ .

г) Постройте график зависимости  $B_n$  от  $n\nu_1$ , переходя постепенно к достаточно большому  $n$ , так чтобы коэффициенты  $B_n$  прошли через нуль два или три раза.

д) Покажите [по результатам пункта г)], что «наиболее важные» частоты (т. е. частоты, для которых  $B_n$  имеет достаточно большие значения) занимают полосу от основной частоты  $\nu_1$  до частоты порядка  $1/\Delta t$ . Обозначим частоту  $1/\Delta t$  через  $\nu_{\max}$ . Конечно, на самом деле в разложении нет максимальной частоты, так как ряды Фурье простираются до  $n = \infty$ . Однако наиболее важные частоты лежат между нулем и  $\nu_{\max}$ . Этот «частотный диапазон» занимает «полосу», равную по величине примерно  $\nu_{\max} = 1/\Delta t$ . Вот частоты, имеющие наибольшее значение:

$$\nu = 0, \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, 4\nu_1, \dots, \nu_{\max} = 1/\Delta t.$$

Соответствующий частотный диапазон  $0 < \nu < \nu_{\max}$  обозначим через  $\Delta\nu$ . Тогда наш результат может быть записан в виде следующего соотношения:

$$\Delta\nu \Delta t \approx 1.$$

Оно справедливо не только для нашей функции  $F(t)$ , описывающей периодически

повторяющиеся прямоугольные импульсы длительностью  $\Delta t$ , но и для периодически повторяющихся импульсов любой формы, если  $\Delta t$  мало по сравнению с периодом. В этом случае главные частоты будут равны 0,  $\nu_1$ ,  $2\nu_1$ ,  $3\nu_1$ , ...,  $1/\Delta t$ . Если импульс не периодический, а одиночный, то оказывается (см. главу 6), что главные частоты спектра Фурье также лежат в полосе частот от нуля до  $1/\Delta t$ ; но это — непрерывный спектр, а не только основная частота  $\nu_1$  и ее гармоники.

Эта задача объясняет частотный спектр электромагнитного излучения, называемого *синхротронным*. Его источником является релятивистский электрон, совершающий равномерное круговое движение с частотой  $\nu_1$ . Можно показать (см. главу 7), что, если такое движение совершает нерелятивистский электрон, то он испускает электромагнитное излучение одной частоты  $\nu_1$ . Причина в том, что электрическое поле в излучении нерелятивистского электрона пропорционально той компоненте ускорения заряда, которая перпендикулярна радиусу-вектору от заряда к наблюдателю. При круговом движении эта проекция ускорения представляет собой гармоническое движение. Поэтому, для нерелятивистского электрона излучаемое поле пропорционально  $\cos \omega t$  или  $\sin \omega t$ . Для релятивистского электрона временная зависимость излучаемого поля не определяется  $\cos \omega_1 t$ . Вместо этого интенсивность излучения сильно сконцентрирована по направлению мгновенной скорости заряда. Когда электрон движется прямо на наблюдателя, он испускает излучение, которое будет обнаружено наблюдателем позже. Излучение, испускаемое в другие моменты времени, не достигнет наблюдателя. Таким образом, электрическое поле, измеренное наблюдателем, имеет определенную величину в течение короткого интервала  $\Delta t$  однажды за каждый период  $T_1$  и будет близко к нулю в остальную часть периода. Поэтому наблюдаемый спектр состоит из частот  $\nu_1 = 1/T_1$  и гармоник  $2\nu_1$ ,  $3\nu_1$  и т. д. до максимальной (главной) частоты, близкой к  $1/\Delta t$ . Покажите, что временной интервал  $\Delta t$  определяется из приближительного равенства  $\Delta t/T_1 \approx \Delta\theta/2\pi$ , где  $\Delta\theta$  — «полная угловая ширина».

**2.31. Пилообразные стоячие волны в мелкой воде.** Волны в мелкой воде — это такие волны, у которых амплитуда движения воды на дне (сосуда, озера и океана) сравнима по величине с амплитудой на поверхности. Мода «омывания» (опыт 1.24) является волной на мелкой воде. Покажите это на опыте, добавив в воду некоторое количество кофейной гущи. Возбудите моду «омывания» (т. е. ту моду, при которой поверхность остается практически плоской) и наблюдайте за движением частиц кофе на дне и на поверхности вблизи центра сосуда и у стенок.

Теперь рассмотрим идеализированные *пилообразные стоячие волны в мелкой воде*. Рассмотрим два независимых сосуда одинаковой формы с одинаковой равновесной глубиной  $h$ , в которых происходят колебания, соответствующие моде «омывания». Сосуды примыкают друг к другу так, что если убрать разделяющие стенки, то получится один сосуд, длинная сторона которого совпадает с горизонтальной составляющей колебаний. Предположим, что относительная фаза колебаний воды такова, что вода в одном сосуде всегда движется в горизонтальном направлении, противоположном направлению движения воды в другом сосуде, так что вода достигает максимальной высоты одновременно на смежных или противоположных стенках.

Предположим, что мы убрали стенки, разъединяющие оба сосуда. Вода на граничной поверхности (когда были стенки) не имела горизонтальной составляющей движения. Когда мы убрали стенки, горизонтальная составляющая (в месте, где были стенки) не появится вследствие симметрии движения воды в двух сосудах. Движение будет продолжаться, как будто бы ничего не произошло! При желании к такой системе можно присоединить другие сосуды. В сосуде мы получили стоячую волну пилообразной формы, которую можно аппроксимировать синусоидальной волной. Заметим, что *длина одного сосуда равна одной полуволне*. (Замечание. Если сделать фурье-анализ этой периодической функции от  $z$ , то первый (и основной) член разложения Фурье будет соответствовать нашей аппроксимирующей синусоидальной функции.) Используйте это приближение в формуле, которая определяет частоту моды «омывания» (см. опыт 1.24). Покажите, что имеет место равенство

$$\lambda\nu = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{gh} = 1,10 \sqrt{gh}.$$



Мы видим, что у этих волн нет дисперсии. (З а м е ч а н и е. Оказывается, что точное дисперсионное соотношение для синусоидальных волн в мелкой воде имеет вид  $\lambda v = \sqrt{gh}$ . В результате нашего «пилообразного» приближения получается завышенная на 10% скорость распространения.)

Для волн в глубокой воде (когда равновесная глубина много больше длины волны) амплитуда волны экспоненциально падает с глубиной и уменьшается в  $e=2,718$  раз при увеличении глубины на  $\kappa \approx \lambda/2\lambda$ . Величина  $\kappa$  называется приведенной длиной волны. В грубом приближении можно сказать, что волны в глубокой воде представляют собой нечто похожее на волны в мелкой воде для глубин от поверхности до эффективной глубины  $h=\kappa$ , так как на таких глубинах амплитуда относительно велика и, грубо говоря, постоянна. Однако для глубин, значительно больших  $\kappa$ , амплитуда очень мала. Таким образом, мы предполагаем, что дисперсионное соотношение для волн в глубокой воде может быть получено из дисперсионного соотношения для волн в мелкой воде заменой равновесной глубины  $h$  на длину  $\kappa$  среднего ослабления амплитуды. Как мы покажем в главе 7, это предположение справедливо. Таким образом, дисперсионное соотношение для волн в глубокой воде имеет вид  $\lambda v = \sqrt{g\kappa}$ .

**2.32. Фурье-анализ симметричных пилообразных импульсов.** Под симметричным пилообразным импульсом мы подразумеваем импульс с одинаковым наклоном переднего и заднего фронтов. Пусть координата  $z=0$  соответствует вершине импульса. Покажите, что периодический пилообразный импульс можно представить рядом Фурье

$$f(z) = 0,82A \left[ \cos k_1 z + \frac{1}{4} \cos 2k_1 z + \frac{1}{9} \cos 3k_1 z + \dots \right],$$

где  $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ , а  $\lambda_1$  — расстояние между вершинами двух импульсов и  $A$  — амплитуда импульсов. Амплитуда  $n$ -го члена в этом разложении пропорциональна  $1/n^2$ . Теперь можно оценить, сколько хорошим было приближение в задаче 2.31, где при выводе дисперсионного соотношения  $\lambda v = 1,10\sqrt{gh}$  был принят во внимание лишь первый член разложения.

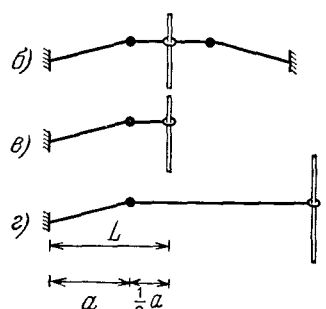


Рис. к задаче 2.34.

**2.33. Опыт. Моды поверхностного натяжения.** Круговые стоячие волны поверхностного натяжения легко наблюдать следующим образом. Наполните бумажную чашку до краев водой и затем добавьте еще чуть-чуть, чтобы вода слегка поднялась над краями (удерживаясь силой поверхностного натяжения). Слегка ударьте по чашке. Волны легко проследить, наблюдая за отражением неба от поверхности воды. Другой способ наблюдения: возьмите небольшой яркий источник света, поместите его на расстоянии около метра от поверхности и наблюдайте за узорами, появляющимися на дне чашки из-за того, что поверхностные волны действуют как линзы. Чтобы убедиться в том, что «работает» поверхностное натяжение, добавьте в воду небольшое количество спирта.

**2.34. Граничные условия на свободном конце струны.** Рассмотрите четыре различные системы, показанные на рисунке.

1. Покажите, что все они имеют одинаковую частоту колебаний для показанных мод.

2. Предположим, что вы хотите применить одну и ту же формулу для выбора волнового числа в случаях в) и г) и в случае а). Покажите, что  $L$  в этой формуле (напишите ее) должно быть равно  $3/2a$ .

**2.35. Упругая струна длиной  $L$  растянута между двумя опорами с равновесным натяжением  $T$ .** Погонная масса струны  $\rho$ , так что вся масса струны равна  $M=\rho L$ . С помощью удара небольшому сегменту  $a$  в центре струны сообщается поперечная скорость  $v_0$ , и в струне возбуждаются колебания. Вычислите амплитуду трех первых гармоник.