ГЛАВА 3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

3.1. Введение

В предыдущих главах были рассмотрены свободные колебания. Здесь мы будем изучать *вынужденные* колебания различных систем. Это значит, что нас интересует поведение систем, к которым тем или иным способом приложена внешняя, зависящая от времени, сила. Без потери общности можно считать, что на систему действует синусоидальная внешняя сила. Нас интересует реакция (отклик) системы на это воздействие как функция частоты.

В п. 3.2 будут рассмотрены свободные колебания одномерного затухающего осциллятора. Затем мы изучим переходную характеристику такого осциллятора, выведенного из положения равновесия силой, изменяющейся по гармоническому закону. Мы обнаружим интересное явление «переходных биений» между внешней силой и переходным процессом свободных колебаний. Затем мы перейдем к установившимся колебаниям, которые совершает система после окончания переходного процесса. Мы рассмотрим также резонансную характеристику осциллятора, находящегося под действием внешней силы при медленном изменении ее частоты. В п. 3.3 мы будем изучать системы с двумя степенями свободы и обнаружим, что каждая мода свободных колебаний вносит свой вклад в вынужденное движение данного движущегося элемента. В частности, будет выведено очень простое соотношение, которое покажет, что движение данного элемента является суперпозицией независимых вкладов от каждой моды. В п. 3.4 мы обнаружим замечательные свойства системы с несколькими степенями свободы, находящейся под воздействием внешней силы, частота которой либо выше, либо ниже частоты самой низкой моды системы. В п. 3.5 мы обратимся к системе из многих связанных маятников, находящейся под внешним воздействием, и откроем существование экспоненциальных волн.

Все явления, рассмотренные в этой главе, можно изучить в простых домашних опытах со связанными маятниками. Для создания внешней силы очень удобен проигрыватель. Банка консервов может служить грузом маятника, а «пружины» обеспечат связь между маятниками *).

3.2. Вынужденные колебания одномерного гармонического затухающего осциллятора

Этот вопрос был частично рассмотрен в 7-й главе I тома, где изучались свободные колебания и установившиеся вынужденные колебания затухающего осциллятора. (Эффект затухания иногда называют демпфированием, а сам осциллятор — демпфированным.) Мы рассмотрим также переходный процесс у гармонического осциллятора, первоначально находящегося в покое и подверженного действию гармонической внешней силы.

Рассмотрим точечную массу M, совершающую колебания в направлении x. Ее смещение от положения равновесия обозначим $x(t)$. На массу действует *возвращающая сила* — $M\omega_0^2 x(t)$, вызываемая пружиной с коэффициентом жесткости $K=M\omega_0^2$. Если на массу M никакие другие силы не действуют, то она будет совершать гармонические колебания с угловой частотой ω_0. Предположим, однако, что на массу действует еще *сила трения*, пропорциональная — $M\Gamma\dot{x}(t)$, где Γ — коэффициент, который мы назовем *коэффициентом затухания, приходящимся на единицу массы*, или просто *коэффициентом затухания*. Кроме силы трения на массу действует *внешняя сила* $F(t)$. В этом случае второй закон Ньютона для массы M имеет вид неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$M\ddot{x}(t) = -M\omega_0^2 x(t) - M\Gamma\dot{x}(t) + F(t). \tag{1}$$

Начнем с более простого случая, когда внешняя сила отсутствует.

Затухание свободных колебаний. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\ddot{x}(t) + \Gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{2}$$

Будем искать решение $x_1(t)$ в виде

$$x_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t/\tau}\cos(\omega_1 t + \theta), \tag{3}$$

где τ, ω_1 и θ неизвестны. Прямой подстановкой мы находим, что (3) является решением уравнений (2) для *любого* значения фазовой константы θ при условии, что

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \tag{4}$$

и

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2. \tag{5}$$

*) Почти во всех опытах «пружины» можно заменить резиновыми жгутами, слабыми пружинами или придумать другой способ связи. (*Прим. ред.*)