внешней силы очень удобен проигрыватель. Банка консервов может служить грузом маятника, а «пружины» обеспечат связь между маятниками *).

3.2. Вынужденные колебания одномерного гармонического затухающего осциллятора

Этот вопрос был частично рассмотрен в 7-й главе I тома, где изучались свободные колебания и установившиеся вынужденные колебания затухающего осциллятора. (Эффект затухания иногда называют демпфированием, а сам осциллятор — демпфированным.) Мы рассмотрим также переходный процесс у гармонического осциллятора, первоначально находящегося в покое и подверженного действию гармонической внешней силы.

Рассмотрим точечную массу M, совершающую колебания в направлении x. Ее смещение от положения равновесия обозначим $x(t)$. На массу действует *возвращающая сила* — $M\omega_0^2 x(t)$, вызываемая пружиной с коэффициентом жесткости $K=M\omega_0^2$. Если на массу M никакие другие силы не действуют, то она будет совершать гармонические колебания с угловой частотой ω_0. Предположим, однако, что на массу действует еще *сила трения*, пропорциональная — $M\Gamma\dot{x}(t)$, где Γ — коэффициент, который мы назовем *коэффициентом затухания, приходящимся на единицу массы*, или просто *коэффициентом затухания*. Кроме силы трения на массу действует *внешняя сила* $F(t)$. В этом случае второй закон Ньютона для массы M имеет вид неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$M\ddot{x}(t) = -M\omega_0^2 x(t) - M\Gamma\dot{x}(t) + F(t). \qquad (1)$$

Начнем с более простого случая, когда внешняя сила отсутствует.

Затухание свободных колебаний. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\ddot{x}(t) + \Gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \qquad (2)$$

Будем искать решение $x_1(t)$ в виде

$$x_1(t) = e^{-{}^1/_2\, t/\tau} \cos(\omega_1 t + \theta), \qquad (3)$$

где τ, ω_1 и θ неизвестны. Прямой подстановкой мы находим, что (3) является решением уравнений (2) для *любого* значения фазовой константы θ при условии, что

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \qquad (4)$$

и

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2. \qquad (5)$$

*) Почти во всех опытах «пружины» можно заменить резиновыми жгутами, слабыми пружинами или придумать другой способ связи. (*Прим. ред.*)

Наиболее общее решение уравнения (2) представляет собой суперпозицию двух линейно независимых решений с двумя произвольными константами, которые могут быть определены из начальных условий для смещения и скорости: $x_1(0)$ и $\dot{x}_1(0)$. Два линейно независимых решения можно получить, взяв два значения θ, например, первое $\theta=0$ и второе $\theta=-\pi/2$. Таким образом, общее решение может быть записано в виде

$$x_1(t)=e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}(A_1\sin\omega_1 t+B_1\cos\omega_1 t). \tag{6}$$

Константы A_1 и B_1 определяются из равенств $B_1=x_1(0)$ и $\omega_1 A_1=\dot{x}_1(0)+\frac{1}{2}\Gamma x_1(0)$, и уравнение (6) принимает вид

$$x_1(t)=e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}\left\{x_1(0)\cos\omega_1 t+\left[\dot{x}_1(0)+\frac{1}{2}\Gamma x_1(0)\right]\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right\}. \tag{7}$$

Когда $\frac{1}{2}\Gamma$ мало по сравнению с ω_0, колебания являются *слабо затухающими*. При $\frac{1}{2}\Gamma$, равном ω_0, говорят, что движение происходит с *критическим затуханием*. Из уравнения (5) следует, что в этом случае частота ω_1 равна нулю, и в решении (7) мы заменяем $\cos\omega_1 t$ на 1 и $\frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t$ на t, так как предел $\frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t$ при ω_1, стремящемся к нулю, равен t.

Когда $\frac{1}{2}\Gamma$ больше ω_0, говорят о *сильном затухании* осциллятора. В этом случае формула (5) дает отрицательное значение ω_1^2. Это значит, что ω_1 равно

$$\omega_1=\pm i|\omega_1|,\qquad |\omega_1|=\sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2-\omega_0^2}, \tag{8}$$

где $i=\sqrt{-1}$. Решение (7) остается справедливым и для этого случая. Оно может быть записано (задача 3.25) в виде

$$x_1(t)=e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}\left\{x_1(0)\operatorname{ch}|\omega_1|t+\left[\dot{x}_1(0)+\frac{1}{2}\Gamma x_1(0)\right]\frac{\operatorname{sh}|\omega_1|t}{|\omega_1|}\right\}. \tag{9}$$

Мы ограничимся случаем *слабого затухания*, когда $\frac{1}{2}\Gamma$ меньше ω_0. Если затухание очень слабо, т. е. $\frac{1}{2}\Gamma\ll\omega_0$, то экспоненциальный множитель $\exp(-\frac{1}{2}\Gamma t)$ можно считать постоянным в течение одного цикла колебаний. В этом случае скорость, с довольно хорошим приближением, будет равна производной выражения (6) по времени, причем множитель $\exp(-\frac{1}{2}\Gamma t)$ можно считать постоянным. Легко показать, что при этом энергия (кинетическая плюс потенциальная) почти постоянна в течение одного цикла колебаний, но уменьшается по экспоненте за интервал времени, включающий в себя много циклов:

$$E(t)=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2(t)+\frac{1}{2}M\omega_0^2x_1^2(t)=E_0e^{-\Gamma t}=E_0e^{-t/\tau}, \tag{10}$$

где

$$E_0=\frac{1}{2}M(\omega_1^2+\omega_0^2)\left(\frac{1}{2}A_1^2+\frac{1}{2}B_1^2\right). \tag{11}$$

Рассмотрим теперь осциллятор со слабым затуханием, на который действует внешняя сила $F(t)$, не равная нулю.

Установившиеся колебания под действием гармонической внешней силы. Очень большой класс функций $F(t)$ можно разложить в ряд Фурье по различным частотам ω:

$$F(t) = \sum_{\omega} f(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]. \tag{12}$$

Например, в п. 2.3 мы показали, что любая «разумная» периодическая функция $F(t)$ допускает такое разложение. В главе 6 мы узнаем, что многие непериодические функции также можно представить в виде рядов или интегралов Фурье. Рассмотрим отдельную составляющую ряда Фурье для такой силы:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t. \tag{13}$$

Здесь нулевой момент времени выбран так, чтобы сделать фазовую константу равной нулю. Если мы будем знать, как найти $x(t)$ для такой гармонической внешней силы, мы легко найдем $x(t)$ для суперпозиции подобных сил, выраженной формулой (12). Действительно, в п. 1.3 было сказано, что для неоднородного линейного уравнения справедлив принцип суперпозиции. Он заключается в том, что решение, соответствующее суперпозиции различных внешних сил, представляет собой суперпозицию отдельных решений. Поэтому мы начнем с неоднородного уравнения с внешней силой в виде одной компоненты ряда Фурье:

$$M\ddot{x}(t) + M\Gamma\dot{x}(t) + M\omega_0^2 x(t) = F_0 \cos \omega t. \tag{14}$$

Мы хотим найти *решение* уравнения (14) *для установившегося состояния*. Установившееся состояние — это движение, совершаемое осциллятором под влиянием гармонической внешней силы, которая действует в течение значительно большего времени, чем постоянная времени τ. В этом случае переходный процесс, который описывает поведение системы в течение интервала времени, равного нескольким τ после момента приложения внешней силы, уже закончился, и осциллятор совершает гармонические колебания с частотой вынуждающей силы ω. При этом движении амплитуда колебаний пропорциональна амплитуде F_0 внешней силы, а фазовая постоянная определенным образом связана с фазовой постоянной внешней силы.

Амплитуда дисперсии и амплитуда поглощения. Вместо того, чтобы описывать колебания в терминах амплитуды и фазы, мы опишем их с помощью двух амплитуд A и B, из которых первая определяет компоненту колебания $A \sin \omega t$, сдвинутую на 90° относительно внешней силы $F_0 \cos \omega t$, а вторая — компоненту $B \cos \omega t$, которая находится в фазе с внешней силой. Таким образом, решение для установившегося состояния может быть записано в виде

$$x_s(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \tag{15}$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что $x_s(t)$ удовлетворяет уравнению (14) только в том случае, если

$$A=\frac{F_0}{M}\frac{\Gamma\omega}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2]}\equiv A_{п}, \tag{16}$$

$$B=\frac{F_0}{M}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2]}\equiv A_{д}. \tag{17}$$

Постоянная A называется *амплитудой поглощения*, а постоянная B — *упругой амплитудой*. (B также называют *амплитудой дисперсии* *).) Эти названия амплитуд объясняются тем, что среднее по времени значение поглощенной осциллятором мощности определяется членом $A_{п}\sin\omega t$. Член $A_{д}\cos\omega t$ дает определенный вклад в мгновенное значение поглощаемой мощности $P(t)$, но в среднем за цикл установившихся колебаний его вклад равен нулю. Действительно, мгновенная мощность $P(t)$ равна произведению силы $F_0\cos\omega t$ на скорость $\dot{x}(t)$. Мгновенная скорость $\dot{x}(t)$ имеет две составляющие: одна — в фазе с внешней силой, другая сдвинута на 90°. Вклад в *среднее значение мощности* P дает та составляющая скорости, которая находится в фазе с силой. Эта составляющая возникает от смещения $A_{п}\sin\omega t$, не находящегося в фазе с внешней силой. Все сказанное можно записать в виде следующих формул:

$$F(t)=F_0\cos\omega t,$$
$$x_s(t)=A_{п}\sin\omega t+A_{д}\cos\omega t,$$
$$\dot{x}_s(t)=\omega A_{п}\cos\omega t-\omega A_{д}\sin\omega t.$$

Мгновенное значение мощности равно (в установившемся процессе)

$$P(t)=F(t)\dot{x}_s(t)=F_0\cos\omega t\,[\omega A_{п}\cos\omega t-\omega A_{д}\sin\omega t]. \tag{18}$$

Обозначая среднее по времени за один цикл скобками $\langle\,\rangle$, имеем

$$P=F_0\omega A_{п}\langle\cos^2\omega t\rangle-F_0\,\omega A_{д}\langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle.$$

Но

$$\langle\cos^2\omega t\rangle\equiv\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\cos^2\omega t\,dt=\frac{1}{2}, \tag{19}$$

если T — период колебаний. Аналогично

$$\langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle=\frac{1}{2}\langle\sin 2\omega t\rangle=0. \tag{20}$$

Таким образом, для среднего за период значения поглощаемой мощности в установившемся режиме имеем

$$P=\frac{1}{2}F_0\,\omega A_{п}. \tag{21}$$

---

*) Мы в дальнейшем будем придерживаться этого названия: $A_{д}$ — амплитуда дисперсии. (*Прим. ред.*)

Уравнение (21) показывает, что в установившемся режиме среднее за период значение поглощаемой мощности пропорционально амплитуде $A_п$ той части полного смещения $x_s(t)$, которая сдвинута на 90° относительно внешней силы. Этот результат не зависит от выбора фазы возмущающей силы, т. е. от того, положили ли мы силу пропорциональной $\cos \omega t$ или $\cos(\omega t+\varphi)$.

В установившемся режиме среднее значение поглощаемой мощности равно среднему значению мощности, рассеиваемой из-за трения. Мгновенное значение силы трения равно — $M\Gamma\dot{x}(t)$. Мгновенное значение рассеиваемой мощности равно произведению силы трения на скорость. Нетрудно показать (сделайте это), что средняя мощность, расходуемая на трение, равна

$$P_{тр} = M\Gamma\langle\dot{x}_s^2\rangle = \frac{1}{2} M\Gamma\omega^2 [A_п^2 + A_д^2], \tag{22}$$

а это выражение равно среднему значению поглощаемой мощности P, определяемой уравнением (21). (См. задачу 3.6.)

В установившемся режиме энергия, запасенная осциллятором, не является совершенно постоянной, так как мгновенное значение поглощаемой мощности $F(t)\dot{x}_s(t)$, определяемое уравнением (18), не равно мгновенному значению мощности $M\Gamma\dot{x}_s(t)$, рассеиваемой из-за трения. Только при усреднении по целому циклу поглощенная и рассеянная мощности равны. Нас интересует средняя величина запасенной энергии. Легко показать, что для установившихся колебаний средняя величина запасенной энергии, или просто средняя по времени энергия колебаний, равна

$$E = \frac{1}{2} M\langle\dot{x}_s^2\rangle + \frac{1}{2} M\omega_0^2\langle x_s^2\rangle = \frac{1}{2} M(\omega^2+\omega_0^2)\left(\frac{1}{2} A_п^2 + \frac{1}{2} A_д^2\right). \tag{23}$$

(См. задачу 3.10.) Заметим, что член с ω^2 определяет среднее значение кинетической энергии, а член с ω_0^2— среднее значение потенциальной энергии. Обе энергии равны только в случае $\omega=\omega_0$ (напомним, что для свободных колебаний с малым затуханием средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии равны). Качественно это можно объяснить следующим образом. Если ω велико по сравнению с ω_0, то скорость массы M изменит знак до того, как эта масса успеет сместиться на большое расстояние и соответственно запасти большую потенциальную энергию. С другой стороны, если ω мало по сравнению с ω_0, скорость никогда не будет очень большой, и в этом случае среднее значение потенциальной энергии преобладает.

Заметим, что при $\omega=\omega_0$ запасенная энергия E [уравнение (23)] равна произведению рассеиваемой в установившемся режиме мощности на постоянную времени свободных колебаний τ. Качественно это легко понять: если убрать внешнюю силу, то из-за трения энергия колебаний будет экспоненциально убывать с постоянной времени τ [см. уравнение (10)]. Когда же к осциллятору приложена внешняя сила, частота которой равна собственной частоте колебаний осциллятора ω_0, то амплитуда колебаний будет расти до наступления установившегося режима, когда мощность, отдаваемая осциллятору, становится равной потерям мощности из-за трения. Так как бо́льшая часть энергии рассеивается из-за силы трения за время τ, то можно считать, что энергия, запасенная осциллятором в установившемся режиме, равна энергии, отдаваемой внешней силой за время τ. Таким образом, мы ожидаем, что в установившемся режиме запасенная энергия будет примерно равна входной мощности, умноженной на время τ, что в свою очередь равно мощности сил трения, умноженной на τ. (Если частота ω не равна ω_0, то соотношение между входной мощностью и запасенной энергией будет более сложным.)

Резонанс. Будем теперь наблюдать за изменением отклика осциллятора на медленное изменение частоты приложенной силы Пусть частота меняется так медленно, что в течение интервала времени, равного τ, ее можно считать постоянной, и, таким образом, для каждого значения частоты осуществляется установившийся режим. Усредненное по времени значение входной мощности P равно [см. уравнения (21) и (16)]

$$P = P_0 \frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \tag{24}$$

где P_0 — значение P при резонансе, т.е. когда $\omega=\omega_0$. Максимального значения P достигает при резонансе. Введем понятие о «точках половинной мощности». Это те значения частоты ω, для которых P равно половине максимального значения P_0. Покажите, что эти точки определяются выражением (см. задачу 3.11)

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma\omega, \tag{25}$$

что эквивалентно равенству

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2+\frac{1}{4}\Gamma^2} \pm \frac{1}{2}\Gamma. \tag{26}$$

[Заметим, что уравнение (25) представляет собой два различных квадратных уравнения относительно ω. Каждое из них имеет одно положительное и одно отрицательное решение. Оба положительных решения даны формулой (26).] Интервал частот между двумя точками половинной мощности называется *«шириной» резонансной кривой* *) и обозначается $(\Delta\omega)_{\text{рез}}$. В соответствии с уравнением (26) имеем

$$(\Delta\omega)_{\text{рез}} = \Gamma. \tag{27}$$

Мы знаем [см. уравнение (4)], что затухание свободных колебаний характеризуется постоянной времени τ, равной $1/\Gamma$. Таким образом, мы пришли к очень важному соотношению между шириной резонансной кривой *вынужденных* колебаний и постоянной времени затухания *свободных* колебаний:

$$\boxed{(\Delta\omega)_{\text{рез}}\,\tau_{\text{своб}} = 1,} \tag{28}$$

*) Иногда для краткости будем называть эту величину «шириной резонанса».

т. е. *ширина резонансной кривой вынужденных колебаний равна обратной величине постоянной времени затухания свободных колебаний.* Это очень общий результат. Позже мы увидим, что он справедлив и для систем со многими степенями свободы. В этих случаях резонансы возникают на частотах, соответствующих нормальным модам свободных колебаний без затухания, так же как и для одномерного осциллятора. [Резонансная частота ω_0 равна частоте свободных колебаний ω_1 только в случае, когда постоянная затухания Γ равна нулю. При затухающих свободных колебаниях частота смещается от ω_0 к ω_1 из-за наличия члена $\exp(-{}^1/_2\Gamma t)$. Для вынужденных колебаний амплитуда постоянна и резонансной частотой является частота свободных колебаний при отсутствии трения.] В случае нескольких степеней свободы ширина резонанса и постоянная времени свободных колебаний для каждой моды удовлетворяют уравнению (28), если сами резонансы достаточно удалены друг от друга по частоте и не перекрываются.

Уравнение (28) имеет большое практическое значение. Часто экспериментально гораздо легче изучить поведение системы вблизи резонанса, чем наблюдать время затухания. В этом случае, определив $\Delta\omega$, по уравнению (28) легко найти τ.

Пример 1. *Время затухания для картонной трубки.* Попытаемся применить уравнение (28) к системе со многими степенями свободы. Возьмем картонную трубку, внезапно возбудим ее ударом и предоставим колебаниям свободно затухать. Удар возбудит главным образом самую низкую моду, для которой длина трубки равна половине длины волны. Система начнет колебаться. С концов трубки происходит испускание звуковой энергии, кроме того, некоторое ее количество теряется из-за «трения» воздуха о стенки трубки (т. е. звуковая энергия переходит в тепло). Таким образом, мы имеем затухающие колебания. Спрашивается, какова постоянная времени затухания этих колебаний? Ваше ухо легко различит преобладающую частоту. Ту же частоту вы услышите, если постоянно дуть в конец трубки. Однако время затухания в этой системе слишком мало, чтобы его можно было измерить на слух. Есть две возможности. Возьмите микрофон, усилитель звуковой частоты и осциллограф. Включите развертку осциллографа в момент возбуждения колебаний и выход усилителя подайте на вертикальные пластины. (В хорошем осциллографе развертка может включаться внешним сигналом.) Сфотографировав след на экране осциллографа, вы можете прямо измерить τ. Однако это можно сделать и иначе. Подайте выходное напряжение звукового генератора на небольшой громкоговоритель, установленный около одного конца трубки. В трубке возникнут установившиеся вынужденные колебания, частота которых будет задана звуковым генератором. Установите микрофон у другого конца трубки и измерьте с его помощью звуковое излучение с этого конца. Выход микрофона подайте на осциллограф, на экране которого можно будет измерить амплитуду звуковых колебаний. Теперь измените частоту генератора и т. д. Экспериментально может оказаться проще работать при постоянной частоте звукового генератора, но менять длину трубки. Нарисуйте зависимость квадрата амплитуды от величины, обратной длине трубки (почему обратной?). Найдите точки половинной мощности; они определят $\Delta\omega$. Используя уравнение (28), найдите τ.

Можно неплохо обойтись и без этих приборов. Возьмите камертон и пять или шесть одинаковых трубок, отличающихся только длиной. Быстро пронесите камертон мимо входных отверстий ваших труб и попытайтесь оценить ширину резонанса. Вы должны найти способ различать интенсивности данного тона, отличающиеся в два раза. Во всяком случае этим методом можно грубо оценить порядок $\Delta\omega$. Для времени затухания колебаний трубки автор получил таким образом значение, лежащее в пределах 20—50 *мсек*. (См. домашний опыт 3.27.)

Зависимость амплитуды дисперсии от частоты. Составляющая $A_д \cos \omega t$ является той частью решения $x_s(t)$ для установившихся колебаний, которая находится *в фазе* с возмущающей силой $F_0 \cos \omega t$. Как указывалось выше, дисперсионная составляющая не дает никакого вклада в среднюю величину поглощаемой энергии. Более того, при резонансе (т. е. когда $\omega = \omega_0$) $A_д$ равно нулю. Это не значит, что дисперсионную составляющую смещения можно не рассматривать. При частотах внешнего возмущающего воздействия, далеких от резонансной частоты, дисперсионная составляющая преобладает. Это видно из следующего. Амплитуда дисперсии [см. равенство (17)] равна

$$A_д = \frac{F_0}{M} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \tag{29}$$

Отношение амплитуды дисперсии и амплитуды поглощения следует из формул (16) и (17):

$$\frac{A_д}{A_п} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma\omega}. \tag{30}$$

Для ω, меньших ω_0, это отношение положительно и может оказаться сколь угодно большим, если ω достаточно мало. Для ω, бо́льших ω_0, отношение $A_д/A_п$ отрицательно и также может быть сколь угодно большим. Для обоих случаев $\Gamma\omega \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$, и мы можем пренебречь вкладом члена $A_п \sin \omega t$ в $x_s(t)$, если мы готовы пренебречь небольшим значением средней мощности. (Вдали от резонанса поглощаемая мощность очень мала по сравнению с мощностью, поглощаемой при резонансе.) Таким образом, вдали от резонанса установившееся решение будет определяться членом $A_д \cos \omega t$:

$$x_s(t) \approx A_д \cos \omega t \approx \frac{F_0 \cos \omega t}{M(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{31}$$

Величина $A_д$ в этой формуле взята из выражения (29), где мы пренебрегли членом $\Gamma^2\omega^2$ в знаменателе. Заметим, что в окончательный результат не входит коэффициент затухания Γ. В частности, легко видеть, что смещение (31) является точным решением уравнения (14) для установившегося процесса при $\Gamma=0$ (см. задачу 3.13).

На рис. 3.1 показаны амплитуда поглощения и амплитуда дисперсии в окрестности резонанса.

Другие «резонансные кривые». Поведение гармонического осциллятора, находящегося под действием внешней силы, можно описать различными величинами, которые имеют подобные (но не одинаковые) «формы кривой резонанса», т. е. зависимости от частоты. Такими величинами являются амплитуда поглощения $A_п$,

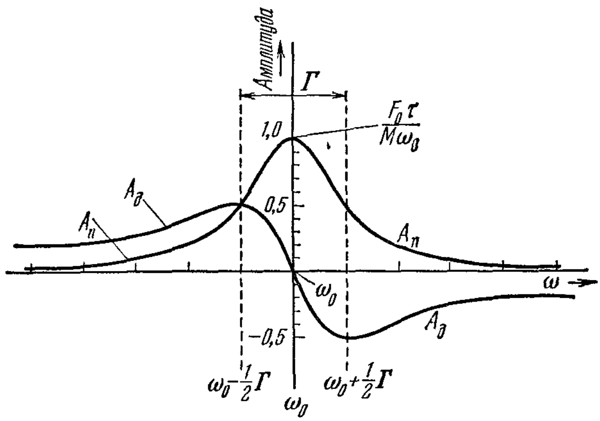

Рис. 3.1. Резонанс вынужденных колебаний. Если на осциллятор действует внешняя сила $F_0 \cos \omega t$, то в установившемся состоянии $x_s(t)=A_п \sin \omega t+A_д \cos \omega t$.

сумма квадратов амплитуд $|A|^2 \equiv A_д^2+A_п^2$, входная мощность P (которая равна рассеиваемой мощности) и запасенная энергия E. Выпишем все эти величины для сравнения. Из уравнения (16), (17), (22) и (23) имеем

$$A_п(\omega)=A_п(\omega_0)\frac{\Gamma^2\omega_0\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \qquad (32)$$

$$|A(\omega)|^2=|A(\omega_0)|^2\frac{\Gamma^2\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \qquad (33)$$

$$P(\omega)=P(\omega_0)\frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}, \qquad (34)$$

$$E(\omega)=E(\omega_0)\frac{{}^1/_2\,\Gamma^2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}. \qquad (35)$$

Все эти величины имеют одинаковый «резонансный знаменатель» D, равный

$$D \equiv (\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2=(\omega_0-\omega)^2(\omega_0+\omega)^2+\Gamma^2\omega^2.$$

Около резонанса быстрое изменение D почти полностью вызвано множителем $(\omega-\omega_0)^2$ в первом члене этого выражения. Присутствие ω в другом члене выражения для D, а также в числителях написанных выше четырех величин играет меньшую роль. Теперь мы видим, что амплитуда поглощения и другие величины, написанные выше, относительно важны только «около» резонанса. («Около» можно довольно условно определить как интервал $\omega_0 - 10\Gamma < \omega < \omega_0 + 10\Gamma$.) В этом диапазоне (т. е. около резонанса) и для случая слабого затухания (т. е. при $\Gamma \ll \omega_0$) мы получим очень хорошее приближение, положив ω равным ω_0 в выражении для D всюду, за исключением разностного множителя $(\omega_0 - \omega)^2$. Выражение для D примет вид

$$D \approx (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega_0)^2 + \Gamma^2\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left[(\omega_0 - \omega)^2 + (^1/_2\,\Gamma)^2\right].$$

Такое же приближение $\omega = \omega_0$ можно сделать и в числителях написанных выше четырех величин. Тогда все они примут одну и ту же форму, которую обозначим через R:

$$R(\omega) \equiv \frac{(^1/_2\,\Gamma)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (^1/_2\,\Gamma)^2}. \tag{36}$$

[Мы выбрали коэффициент пропорциональности таким, чтобы $R(\omega_0) = 1$.] Заметим, что $R(\omega)$ — четная функция $(\omega_0 - \omega)$, т. е. она симметрична относительно резонансной частоты. Легко видеть, что полная «ширина» этой функции на половине максимума $R(\omega)$ равна Γ, так же как и в случае точного выражения для полной ширины на половине максимального значения мощности.

В оптике частотная зависимость вида $R(\omega)$ называется «лоренцевской формой линии». В ядерной физике $R(\omega)$ называется «резонансной кривой Брейта — Вигнера». В этом случае ω_0 и ω заменяют соответственно на $E_0 = \hbar\omega_0$ и $E = \hbar\omega$. Точные резонансные кривые имеют более сложную форму, чем $R(\omega)$, как в оптике, так и в ядерной физике и даже, как мы это только что видели, для гармонического осциллятора.

Переходный режим вынужденных колебаний. Мы хотим найти общее решение дифференциального уравнения для затухающего гармонического осциллятора, находящегося под действием внешней гармонической силы, при заданных произвольных начальных условиях $x(0)$ и $\dot{x}(0)$. Общее решение является суперпозицией частного решения для установившегося состояния $x_s(t)$ и общего решения $x_1(t)$ однородного уравнения движения (уравнения свободных колебаний):

$$x(t) = x_s(t) + x_1(t) = A_{\text{п}} \sin\omega t + A_{\text{д}} \cos\omega t + \\ + \exp(-{}^1/_2\,\Gamma t)\,[A_1 \sin\omega_1 t + B_1 \cos\omega_1 t]. \tag{37}$$

Здесь произвольные константы A_1 и B_1 выбираются такими, чтобы удовлетворить начальным условиям для смещения и скорости. Уравнение (37) является общим решением: во-первых, оно удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению и, во-вторых, справедливо для любых начальных условий $x(0)$ и $\dot{x}(0)$. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что решение, отвечающее таким требованиям, является единственным.

Осциллятор, первоначально находившийся в покое. Рассмотрим, какой вид примет наше общее решение, если при $t=0$ *осциллятор находится в положении равновесия.* Начальное условие $x(0)=0$ дает $B_1=-A_д$. Теперь найдем A_1 из условия, что начальная скорость $\dot{x}(0)$ равна нулю. Нас интересует случай слабого затухания, поэтому будем считать, что множитель $\exp(-{}^1/_2\Gamma t)$ практически не меняется в течение любого данного цикла колебаний. Используя это приближение, легко показать, что $\dot{x}(0)\approx\omega A_п+\omega_1 A_1$. Так как нас интересуют частоты возмущающей силы вблизи частоты резонанса, то мы просто положим $A_1=-A_п$. Тогда

$$\dot{x}(0)\approx(\omega-\omega_1)A_п. \tag{38}$$

Это выражение равно нулю либо при $\omega=\omega_1$, либо при $A_п=0$ (т. е. для $\Gamma=0$). Сделав такой выбор констант, мы имеем $x(0)=0$ и $\dot{x}(0)=0$. Решение (37) примет вид

$$x(t)=A_п[\sin\omega t-\exp(-{}^1/_2\Gamma t)\sin\omega_1 t]+\\ +A_д[\cos\omega t-\exp(-{}^1/_2\Gamma t)\cos\omega_1 t]. \tag{39}$$

Ниже рассмотрены некоторые интересные частные случаи.

Случай 1. *Частота возмущающей силы равна собственной частоте колебаний.* Положив $\omega=\omega_1$ в выражении (39), получим

$$x(t)=[1-\exp(-{}^1/_2\Gamma t)]\,[A_п\sin\omega t+A_д\cos\omega t]=\\ =[1-\exp(-{}^1/_2\Gamma t)]\,x_s(t), \tag{40}$$

где $x_s(t)$ — решение для установившего режима. Таким образом, когда частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний ω_1, установившееся решение как бы «существует сначала» с амплитудой колебаний, которая монотонно возрастает от нуля до своего конечного установившегося значения.

Случай 2. *Отсутствие затухания и бесконечные биения.* Положив $\Gamma=0$, получим $A_п=0$ и

$$A_д=\frac{F_0/M}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

Тогда решение (39) принимает вид

$$x(t)=\frac{F_0}{M}\frac{[\cos\omega t-\cos\omega_0 t]}{(\omega_0^2-\omega^2)}, \tag{41}$$

что означает суперпозицию двух гармонических колебаний. С таким явлением мы встречались при рассмотрении биений от двух камертонов в п. 1.5. Напомним, что линейную суперпозицию двух гармонических колебаний (41) можно представить как «почти гармоническое» колебание с «быстрой» средней частотой $\omega_{ср}={}^1/_2(\omega_0+\omega)$ и медленно меняющейся амплитудой, которая совершает гармонические колебания с «медленной» частотой модуляции $\omega_{мод}={}^1/_2(\omega_0-\omega)$. В последнем представлении мы получаем

$$x(t)=A_{мод}(t)\sin\omega_{ср}t, \tag{42}$$

где

$$A_{\text{мод}}(t)=\frac{F_0}{M}\frac{2\sin[{}^1/_2(\omega_0-\omega)t]}{(\omega_0^2-\omega^2)}. \qquad (43)$$

Амплитуда колебаний изменяется с частотой модуляции ${}^1/_2(\omega_0-\omega)$. Запасенная энергия $E(t)$ колеблется относительно среднего положения от нуля до максимального значения E_0:

$$E(t)=E_0\sin^2[{}^1/_2(\omega_0-\omega)t]={}^1/_2E_0[1-\cos(\omega_0-\omega)t]. \qquad (44)$$

Таким образом, энергия колеблется с частотой биений, равной разности между частотой внешней силы и собственной частотой.

Чтобы наблюдать «почти бесконечные» биения, подвесьте банку консервов на струне длиной около 45 *см*. Свяжите полученный маятник с помощью резинового жгута с краем диска проигрывателя, включенного на скорость 45 *об/мин*.

Для особого случая $\omega=\omega_0$ из равенства (43) следует, что амплитуда быстрых колебаний линейно растет со временем; это соответствует бесконечному периоду биений:

$$x(t)=\left[\frac{1}{2}\frac{F_0t}{M\omega_0}\right]\sin\omega_0t. \qquad (45)$$

Амплитуда станет бесконечной через бесконечно долгое время.

Случай 3. *Процесс установления биений*. Для слабо затухающих колебаний и для частоты ω, близкой к ω_1, нетрудно показать, что величина запасенной энергии приблизительно равна (задача 3.24)

$$E(t)=E[1+\exp(-\Gamma t)-2\exp(-{}^1/_2\Gamma t)\cos(\omega-\omega_1)t], \qquad (46)$$

где E — энергия в установившемся режиме. (Если положить $\omega=\omega_1$, то получим случай 1, рассмотренный выше; если положить $\Gamma=0$, получим случай 2.) Отсюда следует, что если процесс начинается при $t=0$ с отсутствия в осцилляторе запасенной энергии, то она не будет плавно увеличиваться до своего установившегося значения (если только ω не равно частоте свободных колебаний ω_1). Вместо этого энергия будет совершать колебания с частотой $\omega-\omega_1$. Эти биения обусловлены тем, что осциллятору «больше нравится» совершать колебания со своей собственной частотой ω_1, когда на него действуют с частотой ω. Поэтому вынуждающая сила иногда оказывается в фазе с совершаемыми колебаниями, что увеличивает их амплитуду, а иногда в противофазе, что уменьшает амплитуду. Если нет затухания, то эти биения будут соответствовать случаю 2. Однако из-за затухания фаза колебаний осциллятора постепенно приспособится к фазе внешней силы и примет определенное значение. По истечении довольно долгого промежутка времени осциллятор будет совершать установившиеся колебания с частотой возмущающей силы ω без биений. Относительная фаза колебаний осциллятора и внешней силы примет постоянное значение, при котором величина энергии, получаемая осциллятором в каждом цикле колебаний, будет в точности равна потерям энергии на трение за цикл. Теперь энергия осциллятора будет постоянна и относительная фаза колебаний осциллятора и внешней силы будет также постоянной. Переходный процесс для энергии показан на рис. 3.2.

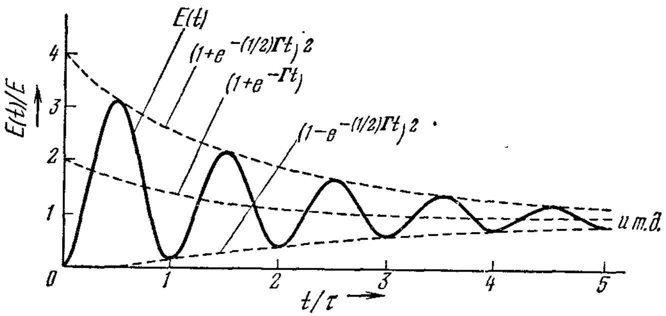

Рис. 3.2. Переходные биения. (Мы выбрали период биений, равный времени затухания τ.) Запасенная энергия $E(t)$ растет от нуля и испытывает затухающие колебания с частотой биений (равной разности частот вынуждающей силы и свободных колебаний), постепенно приближаясь к энергии E установившегося состояния.

Качественная оценка формы резонансной кривой. Теперь, зная характер переходного процесса, попытаемся оценить отношение амплитуды в установившемся режиме при частоте резонанса к амплитудам при других частотах. Пусть осциллятор, сначала неподвижный, подвергается действию вынуждающей силы на резонансной частоте. Если нет затухания, амплитуда колебаний будет линейно возрастать в соответствии с уравнением (45). В действительности же она *будет возрастать* линейно лишь вначале, потому что в первый момент средняя скорость мала и соответственно затухание незначительно. Однако в конце концов рост амплитуды прекратится на уровне, которого она достигнет за время порядка τ. Из-за затухания амплитуда будет поддерживаться на этом уровне. Мы можем оценить эту амплитуду, имея в виду, что максимальная сила F_0, действующая на массу M, за время τ сообщит ей максимальный импульс силы $F_0\tau$. Но по второму закону Ньютона максимальный импульс равен произведению массы M на максимальную скорость $\omega_0 A(\omega_0)$. Таким образом, $F_0\tau \approx M\omega_0 A(\omega_0)$ и

$$A(\omega_0) \approx \frac{F_0\tau}{M\omega_0}. \tag{47}$$

Это — оценка амплитуды в установившемся режиме, когда $\omega = \omega_0$.

Пусть теперь частота вынуждающей силы ω сильно отличается от ω_0. Если нет затухания, то амплитуда будет колебаться с частотой модуляции $^1/_2(\omega_0 - \omega)$, а энергия осциллятора будет колебаться с частотой биений $\omega_0 - \omega$. «Включим» затухание. Потери энергии на трение пропорциональны квадрату скорости. Поэтому, когда энергия максимальна, затухание самое большое. Когда энергия равна нулю, затухания нет. Таким образом, затухание стремится «обрезать вершины холмов» на графике зависимости энергии от времени. (Затухание стремится также «засыпать долины».) В конце концов биения будут погашены. Допустим, что амплитуда при наличии затуханий равна половине амплитуды, которая существует при биениях, и поэтому заменим $\sin [{}^1/_2 (\omega_0 - \omega) t]$ в уравнении (43) на ${}^1/_2$. Тогда для частоты, сильно отличающейся от частоты ω_0, имеем согласно выражению (43)

$$A(\omega) \approx \frac{F_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{48}$$

Нетрудно догадаться, что амплитуда $A(\omega)$ может быть связана с максимальным импульсом, который получен от силы F_0 за некоторую часть f одного периода биений. Этот импульс силы равен произведению массы на амплитуду $A(\omega)$ и на среднюю угловую частоту ${}^1/_2 (\omega_0 + \omega)$. Период биений T равен $2\pi/(\omega_0 - \omega)$. Таким образом, имеем

$$\frac{F_0 f\, 2\pi}{\omega_0 - \omega} \approx MA(\omega) \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega).$$

Если положить $f = 1/(4\pi)$, мы приходим к равенству (48).

Из точного решения нам известно, что при резонансе амплитуда колебаний равна $A_п(\omega_0)$, так как амплитуда $A_д$ в этом случае равна нулю. В самом деле, наша «угаданная» амплитуда $A(\omega_0)$ равна $A_п(\omega_0)$, что легко видеть, сравнив уравнения (47) и (16). Мы также знаем, что вдали от резонанса точное решение дает для амплитуды колебаний значение $A_д(\omega)$. Наше «угаданное» значение амплитуды $A(\omega)$ вдали от ω_0 совпадает с $A_д(\omega)$, что видно из уравнений (48) и (17).

3.3. Резонансы в системе с двумя степенями свободы

В главе 1 было показано, что поведение каждой моды свободно колеблющейся системы со многими степенями свободы похоже на поведение простого гармонического осциллятора. Основное различие заключается в том, что система, а следовательно, и соответствующий «гармонический осциллятор» занимают определенную область пространства, а не сосредоточены в точке. Таким образом, в случае многомерной системы каждая мода характеризуется определенной геометрической формой.

В главе 1, изучая моды свободно колеблющихся систем, мы пренебрегали трением. Можно предполагать, что с учетом трения каждая мода становится подобной затухающему одномерному осциллятору. Действительно, каждая мода имеет свой собственный механизм затухания и, соответственно, свой собственный коэффициент затухания Г и свою собственную постоянную времени τ. В некоторых системах механизм затухания может быть связан с определенными «движущимися элементами», и поэтому все моды могут иметь приблизительно одинаковую постоянную затухания и одинаковые постоянные времени. Примером такой ситуации является система