зать вершины холмов» на графике зависимости энергии от времени. (Затухание стремится также «засыпать долины».) В конце концов биения будут погашены. Допустим, что амплитуда при наличии затуханий равна половине амплитуды, которая существует при биениях, и поэтому заменим $\sin[{}^1/_2(\omega_0-\omega)t]$ в уравнении (43) на $^1/_2$. Тогда для частоты, сильно отличающейся от частоты ω_0, имеем согласно выражению (43)

$$A(\omega) \approx \frac{F_0}{M}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{48}$$

Нетрудно догадаться, что амплитуда $A(\omega)$ может быть связана с максимальным импульсом, который получен от силы F_0 за некоторую часть f одного периода биений. Этот импульс силы равен произведению массы на амплитуду $A(\omega)$ и на среднюю угловую частоту $^1/_2(\omega_0+\omega)$. Период биений T равен $2\pi/(\omega_0-\omega)$. Таким образом, имеем

$$\frac{F_0 f\, 2\pi}{\omega_0-\omega} \approx MA(\omega)\frac{1}{2}(\omega_0+\omega).$$

Если положить $f=1/(4\pi)$, мы приходим к равенству (48).

Из точного решения нам известно, что при резонансе амплитуда колебаний равна $A_п(\omega_0)$, так как амплитуда $A_д$ в этом случае равна нулю. В самом деле, наша «угаданная» амплитуда $A(\omega_0)$ равна $A_п(\omega_0)$, что легко видеть, сравнив уравнения (47) и (16). Мы также знаем, что вдали от резонанса точное решение дает для амплитуды колебаний значение $A_д(\omega)$. Наше «угаданное» значение амплитуды $A(\omega)$ вдали от ω_0 совпадает с $A_д(\omega)$, что видно из уравнений (48) и (17).

3.3. Резонансы в системе с двумя степенями свободы

В главе 1 было показано, что поведение каждой моды свободно колеблющейся системы со многими степенями свободы похоже на поведение простого гармонического осциллятора. Основное различие заключается в том, что система, а следовательно, и соответствующий «гармонический осциллятор» занимают определенную область пространства, а не сосредоточены в точке. Таким образом, в случае многомерной системы каждая мода характеризуется определенной геометрической формой.

В главе 1, изучая моды свободно колеблющихся систем, мы пренебрегали трением. Можно предполагать, что с учетом трения каждая мода становится подобной затухающему одномерному осциллятору. Действительно, каждая мода имеет свой собственный механизм затухания и, соответственно, свой собственный коэффициент затухания Γ и свою собственную постоянную времени τ. В некоторых системах механизм затухания может быть связан с определенными «движущимися элементами», и поэтому все моды могут иметь приблизительно одинаковую постоянную затухания и одинаковые постоянные времени. Примером такой ситуации является система из двух одинаковых маятников, связанных пружиной, в которой затухание существует либо для каждой нити подвеса, либо для каждой массы. Так как в каждой моде движения обоих маятников одинаковы, то обе моды такой системы будут иметь одинаковую постоянную времени. В других системах механизм затухания может зависеть от моды. Например, пружина, связывающая два маятника (см. пример 13, глава 1), может иметь трение, возникающее при смещении ее витков, что будет создавать затухания для колебаний, связанных с растяжением или сжатием. Если это единственный механизм затухания, то мода 2 (мода, при которой пружина сжимается и разжимается) будет иметь значительно бóльшую постоянную затухания, чем мода 1, когда длина пружины постоянна, т. е. $\Gamma_2 \gg \Gamma_1$, и поэтому $\tau_2 \ll \tau_1$.

Когда система, имеющая несколько мод, находится под действием внешней силы, то резонанс наступает всякий раз, когда частота внешнего воздействия становится равной частоте моды. Оказывается, что *амплитуда поглощения и амплитуда дисперсии для данного движущегося элемента являются суперпозицией вкладов амплитуд от каждого резонанса* (отвечающего определенной моде свободной системы). Каждый из этих вкладов имеет форму, подобную найденной нами в п. 3.2 для системы с одной степенью свободы.

Медленно меняя частоту возмущающего воздействия и измеряя мощность, поглощаемую данным движущимся элементом, как функцию частоты ω, мы обнаружим резонанс всякий раз, когда ω находится вблизи частоты моды. (Мы будем использовать выражения «резонансная частота» и «частота моды» как взаимозаменяемые выражения, хотя первое относится к случаю вынужденных колебаний, а второе — к свободным колебаниям.) Каждому резонансу соответствует ширина резонансной кривой [см. (28)]

$$\Delta\omega = \Gamma = 1/\tau.$$

Здесь $\Delta\omega$ — полная ширина, соответствующая половине максимального значения поглощаемой мощности, а Γ и τ — соответственно постоянная затухания и постоянная времени для свободных колебаний отдельной моды. Это соотношение справедливо, если затухание мало и если интервал частот между отдельными резонансами больше ширины резонанса. В этом случае в области любого резонанса основной вклад в амплитуду поглощения дает только одна мода. Однако оказывается, что для амплитуды дисперсии мы не можем пренебречь вкладом от каждой моды. (См. задачу 3.20).

Пример 2. *Вынужденные колебания двух связанных маятников.* Наша система показана на рис. 3.3 и описана в домашнем опыте 3.8 (где гири маятника — это банки консервов, пружина — это «пружина», внешняя сила создается резиновым жгутом длиной около 3 *м*, соединяющим систему с диском проигрывателя, а затухание вызвано трением струн, на которых подвешены банки консервов, о какой-нибудь предмет). Для простоты положим, что каждый маятник имеет одинаковую постоянную затухания Г. В этом случае уравнения движения примут вид

$$M\ddot{\psi}_a = -\frac{Mg}{l}\psi_a - K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_a + F_0\cos\omega t, \tag{49}$$

$$M\ddot{\psi}_b = -\frac{Mg}{l}\psi_b + K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_b. \tag{50}$$

Мы рассматривали свободные колебания такой системы при отсутствии затухания и знаем, что если F_0 и Г равны нулю, то моды определяются следующим образом:

$$\text{мода 1:}\quad \psi_a = \psi_b,\quad \omega_1^2 = g/l,\quad \psi_1 = {}^1/_2(\psi_a + \psi_b), \tag{51}$$

$$\text{мода 2:}\quad \psi_a = -\psi_b,\quad \omega_2^2 = g/l + 2K/M,\quad \psi_2 = {}^1/_2(\psi_a - \psi_b), \tag{52}$$

где ψ_1 и ψ_2 — нормальные координаты.

Каждая мода ведет себя как осциллятор под действием внешней силы. Перейдем к нормальным координатам ψ_1 и ψ_2. Сложив уравнения (49) и (50), получим

$$M\ddot{\psi}_1 = -\frac{Mg}{l}\psi_1 - M\Gamma\dot{\psi}_1 + \frac{1}{2}F_0\cos\omega t. \tag{53}$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим

$$M\ddot{\psi}_2 = -M\left[\frac{g}{l} + \frac{2K}{M}\right]\psi_2 - M\Gamma\dot{\psi}_2 + \frac{1}{2}F_0\cos\omega t. \tag{54}$$

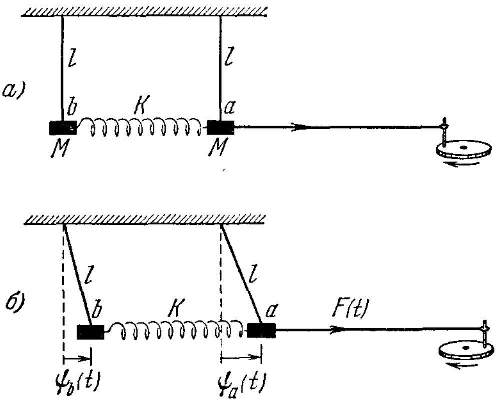

Рис. 3.3. Вынужденные колебания связанных маятников.
а) Равновесие; *б)* общий случай.

Заметим, что уравнения (53) и (54) не связаны (независимы). Сравнивая уравнение (1) с уравнениями (53) и (54), мы видим, что два последних являются уравнениями гармонического осциллятора с затуханием, находящегося под действием внешней силы. Таким образом, нормальная координата ψ_1 ведет себя как простой гармонический осциллятор с массой M, с коэффициентом жесткости пружины $M\omega_1^2$ и коэффициентом затухания Г, находящийся под внешним воздействием ${}^1/_2 F_0\cos\omega t$. Нормальная координата ψ_2 ведет себя аналогичным образом, имея соответствующие параметры: M, $M\omega_2^2$, Г и ${}^1/_2 F_0\cos\omega t$. Эти колебания *независимы*, так что мы можем написать установившиеся решения ψ_1 и ψ_2 отдельно. Каждая мода ведет себя как одномерный осциллятор, поэтому каждая мода имеет свои собственные амплитуду поглощения, амплитуду дисперсии и резонансную частоту, соответствующую частоте моды, точно так же, как в случае одномерного осциллятора.

Движение каждого элемента является суперпозицией отдельных мод, совершающих вынужденные колебания. Рассмотрим движение двух элементов a и b нашей системы. В соответствии с уравнениями (51) и (52) имеем

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_b = \psi_1 - \psi_2. \qquad (55)$$

Из уравнений (55) следует, что амплитуда поглощения для элемента a представляет собой сумму соответствующих амплитуд обеих мод. Амплитуда поглощения для элемента b представляет собой разность амплитуд поглощения двух мод. То же можно сказать и об амплитудах дисперсии для элементов a и b; они соответственно равны сумме и разности амплитуд дисперсии обеих мод.

Когда частота внешнего воздействия равна частоте одной из мод, элементы a и b движутся так, как если бы их колебания принадлежали этой моде (при свободных колебаниях).

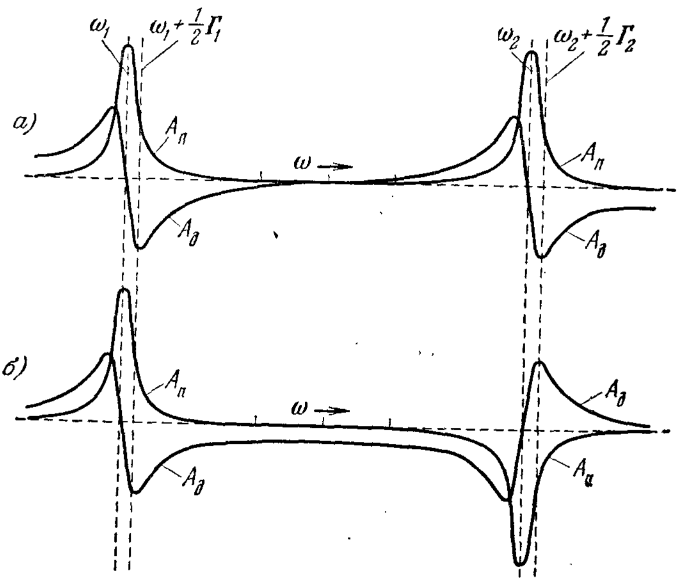

Рис. 3.4. Резонанс в системе с двумя степенями свободы.

Графики изображают зависимость от частоты амплитуды поглощения и амплитуды дисперсии для (*а*) маятника, непосредственно связанного с вынуждающей силой, и (*б*) для маятника, удаленного от точки приложения вынуждающей силы. Расстояние между резонансными частотами выбрано равным тридцатикратному значению полуширины $^1/_2\Gamma$ резонансной кривой, одинаковой для каждой моды.

На рис. 3.4 показаны графики амплитуды поглощения и амплитуды дисперсии для ψ_a и ψ_b.

Из этого примера видно, что установившаяся амплитуда каждого движущегося элемента может быть представлена суперпозицией вкладов от каждого резонанса, т. е. от каждой моды свободно колеблющейся системы. Каждый вклад (каждая составляющая) в этой суперпозиции соответствует вынужденным колебаниям осциллятора одной из мод. Вклад каждой моды зависит от того, каким образом к системе приложена внешняя сила. Для случая, показанного на рис. 3.3, мы нашли, что каждый движущийся элемент получает одинаковый вклад (с точностью до знака) от каждой моды. Однако, привязав резиновый жгут к центру пружины, мы не получили бы одинакового вклада от обеих мод. Таким образом, вклад каждой моды зависит от способа приложения силы.

Вынужденные колебания системы из многих связанных маятников. Положим, что вместо двух маятников, мы имеем целую группу таких связанных маятников, расположенных вдоль прямой. Если к системе приложить внешнюю гармоническую силу и менять ее частоту так медленно, чтобы все время существовал установившийся режим, то мы будем наблюдать резонанс всякий раз, когда частота внешнего воздействия будет равна частоте одной из мод. (Конечно, внешняя сила может быть приложена таким образом, что некоторые моды, как было замечено выше, не возбудятся. Тогда на частотах, соответствующих этим модам, резонанса не будет.) Точно так же, как в случае системы с двумя степенями свободы, установившаяся амплитуда каждого движущегося элемента будет суперпозицией вкладов от каждой из мод системы.

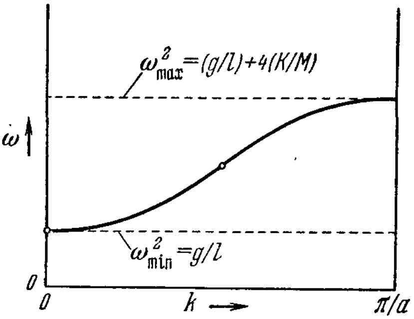

Рис. 3.5. Дисперсионное соотношение для связанных маятников.

Две точки соответствуют двум резонансам системы двух связанных маятников. Резонансы в аналогичных системах из большего числа связанных маятников будут представлены точками на той же кривой. Число точек равно числу резонансов, которое в свою очередь равно числу мод свободных колебаний.

Чтобы проследить изменение резонансных частот и соответственно волновых чисел, можно построить график дисперсионного соотношения (которое не зависит от числа степеней свободы и граничных условий) и на графике отложить точки, соответствующие резонансам рассматриваемой системы. Дисперсионное соотношение для связанных маятников было показано на рис. 2.18. Рис. 3.5 представляет собой тот же график, на котором показаны две точки, соответствующие модам, определенным из граничных условий, для рассмотренной системы из двух маятников.

3.4. Фильтры

Когда на систему действует внешняя сила с частотой ω, установившееся движение любого элемента представляет собой суперпозицию вкладов от всех резонансов. В частности, возвращающая сила ω^2, приходящаяся на единицу смещения и на единицу массы, которая в установившемся режиме имеет общее значение для всех движущихся элементов, образуется в результате суперпозиции