тора одной из мод. Вклад каждой моды зависит от того, каким образом к системе приложена внешняя сила. Для случая, показанного на рис. 3.3, мы нашли, что каждый движущийся элемент получает одинаковый вклад (с точностью до знака) от каждой моды. Однако, привязав резиновый жгут к центру пружины, мы не получили бы одинакового вклада от обеих мод. Таким образом, вклад каждой моды зависит от способа приложения силы.

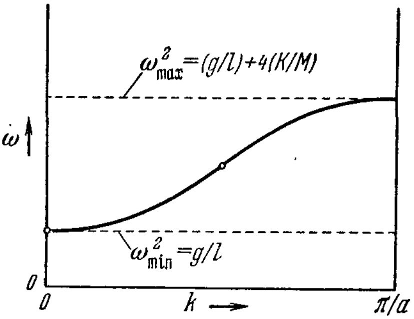

Рис. 3.5. Дисперсионное соотношение для связанных маятников.

Две точки соответствуют двум резонансам системы двух связанных маятников. Резонансы в аналогичных системах из большего числа связанных маятников будут представлены точками на той же кривой. Число точек равно числу резонансов, которое в свою очередь равно числу мод свободных колебаний.

Вынужденные колебания системы из многих связанных маятников. Положим, что вместо двух маятников, мы имеем целую группу таких связанных маятников, расположенных вдоль прямой. Если к системе приложить внешнюю гармоническую силу и менять ее частоту так медленно, чтобы все время существовал установившийся режим, то мы будем наблюдать резонанс всякий раз, когда частота внешнего воздействия будет равна частоте одной из мод. (Конечно, внешняя сила может быть приложена таким образом, что некоторые моды, как было замечено выше, не возбудятся. Тогда на частотах, соответствующих этим модам, резонанса не будет.) Точно так же, как в случае системы с двумя степенями свободы, установившаяся амплитуда каждого движущегося элемента будет суперпозицией вкладов от каждой из мод системы.

Чтобы проследить изменение резонансных частот и соответственно волновых чисел, можно построить график дисперсионного соотношения (которое не зависит от числа степеней свободы и граничных условий) и на графике отложить точки, соответствующие резонансам рассматриваемой системы. Дисперсионное соотношение для связанных маятников было показано на рис. 2.18. Рис. 3.5 представляет собой тот же график, на котором показаны две точки, соответствующие модам, определенным из граничных условий, для рассмотренной системы из двух маятников.

3.4. Фильтры

Когда на систему действует внешняя сила с частотой ω, установившееся движение любого элемента представляет собой суперпозицию вкладов от всех резонансов. В частности, возвращающая сила ω^2, приходящаяся на единицу смещения и на единицу массы, которая в установившемся режиме имеет общее значение для всех движущихся элементов, образуется в результате суперпозиции различных мод. Рассмотрим качественно, что происходит при изменении ω^2. Предположим сначала, что частота ω лежит где-то между минимальным и максимальным значениями резонансных частот, но достаточно далеко от областей резонанса. В этом случае амплитуда данного движущегося элемента в основном определяется вкладом амплитуд дисперсии от всех мод. Вклады различных мод имеют разные знаки в зависимости от того, какой движущийся элемент мы рассматриваем. [См. уравнения (55). Сравните вклады от моды 2 для ψ_a и ψ_b.] Увеличивая ω^2, мы можем приблизиться к резонансной частоте. При прохождении через резонанс слева направо вклад от амплитуды дисперсии для данной моды меняет знак. При дальнейшем увеличении частоты амплитуда колебаний различных движущихся элементов будет более или менее сложным образом увеличиваться или уменьшаться по мере того, как мы будем проходить резонансные частоты, соответствующие разным модам. В конце концов мы пройдем самое большое значение частоты, соответствующее последней моде. После этого больше не будет происходить изменения знака вкладов, так как теперь знаки различных амплитуд дисперсии уже не будут меняться при увеличении частоты. Поэтому движущиеся элементы будут сохранять в большей или меньшей степени форму самой высокой моды (но не точно, конечно). Происходит нечто очень интересное. Пусть система представляет собой вытянутое в линию устройство (например, маятники, связанные пружинами), а внешняя сила приложена к одному из ее концов и частота этой силы больше частоты самой высокой моды. В этом случае движущийся элемент, ближайший к точке приложения силы, имеет самую большую амплитуду колебаний, соседний с ним — меньшую, следующий — еще меньшую и т. д. Амплитуда уменьшается с увеличением расстояния от *входного* конца системы, к которому приложена сила. В этом случае говорят, что система представляет собой *фильтр*.

Пример 3. *Два связанных маятника как механический фильтр.* Рассмотрим в качестве примера два связанных маятника (рис. 3.3). Предположим, что на вход системы (маятник a) действуют с частотой большей, чем частота ω_2, которая соответствует моде 2. Маятник a непосредственно связан с внешней силой, поэтому для этого маятника возвращающая сила в установившемся режиме имеет некоторый вклад от внешней силы. Однако для маятника b это уже несправедливо. Его возвращающая сила образуется только натяжением пружины и силой тяжести, как и в случае свободных колебаний. При свободных колебаниях наибольшая возмущающая сила на единицу смещения, которую пружина и сила тяжести могли обеспечить, соответствовала конфигурации самой высокой моды. В нашем случае это соответствует маятникам, движущимся в противоположные стороны. Единственный способ для маятника b иметь то же, что у маятника a, отношение возвращающей силы к массе и смещению — это иметь меньшее смещение: $|B| < |A|$. Чем больше ω по сравнению с ω_2, тем меньше должно быть соответствующее смещение маятника b по сравнению с a. Иначе говоря, маятник b может двигаться вместе с a лишь при меньшем смещении.

Аналогичная ситуация возникнет для системы из нескольких связанных маятников, если частота внешней силы, приложенной к одному концу системы, превысит частоту самой высокой моды. Конфигурация в установившемся режиме будет соответствовать высшей моде, т. е. каждый маятник будет двигаться с фазой, противоположной фазе своих соседей. При этом для каждого маятника будет обеспечено самое большое значение возвращающей силы, приходящейся на единицу смещения и на единицу массы. Равенство ω^2 для всех маятников приводит к тому, что каждый следующий маятник (от входа) должен иметь меньшее смещение. Таким образом амплитуда смещения каждого следующего маятника будет уменьшаться по мере удаления от конца, к которому приложена внешняя сила.

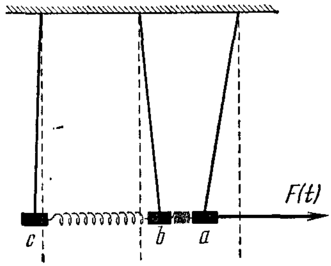

Рис. 3.6. Механический фильтр. Частота вынуждающей силы больше частоты самой высокой моды. Относительные фазы маятников совпадают с фазами этой моды. Амплитуда «на выходе» (маятник c) меньше амплитуды «на входе» (маятник a).

Срезание высоких частот. Мы рассмотрели пример *механического фильтра.* Если на вход системы действует сила $F_0 \cos \omega t$, то амплитуда движения на выходе (т. е. амплитуда движения последнего маятника) значительно меньше, чем на входе, если только ω много больше частоты самой высокой моды. При этом конфигурация системы будет той же, что у самой высокой моды, за тем исключением, что амплитуда маятников постепенно убывает к выходному концу системы. *Частота, соответствующая самой высокой моде (свободных колебаний), называется граничной частотой вынужденных колебаний.* Если частота внешней силы на входе больше граничной частоты, то движение, передаваемое на вход этой силой, не проходит через фильтр, оно «срезается». На рис. 3.6 показана система из трех маятников, на которую действуют с частотой, большей граничной частоты. (Такую систему легко сделать с помощью «пружины» и трех банок консервов; см. домашний опыт 3.16.)

Срезание низких частот. Посмотрим, что произойдет, если на вход системы действовать с частотой меньшей, чем самая малая собственная частота (т. е. частота, соответствующая первой моде свободных колебаний). Покажем, что если частота на входе много меньше этой частоты, то амплитуда на выходе (т. е. амплитуда последнего от входа маятника) много меньше входной амплитуды. Таким образом, *частота самой низкой моды также является граничной частотой.*

Рассмотрим нашу систему из двух связанных маятников (рис.3.3). При конфигурации, соответствующей первой моде, все маятники колеблются в фазе и с одинаковой амплитудой. Пружина не деформирована, и возвращающая сила создается только силой тяжести, Таким образом, частота колебаний ω_1 равна $\sqrt{g/l}$. Теперь предположим, что на вход системы действует сила с частотой ω, которая меньше, чем ω_1. Тогда в установившемся режиме возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и на единицу массы, должна быть меньше, чем g/l, для каждой гири маятника. Возвращающая сила, действующая на маятник на входном конце системы, образуется внешней силой. На второй маятник будет действовать возвращающая сила, образованная силой тяжести и пружиной. Единственная возможность, чтобы возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы для этого маятника была меньше g/l, заключается в том, что вклад пружины в величину возвращающей силы должен быть обратного знака по сравнению с вкладом от силы тяжести. Легко показать, что в этом случае смещение маятника b будет меньше, чем маятника a, но того же знака. (Пружина растянута.) Таким образом, оба маятника колеблются, имея разность фаз, соответствующую первой моде, но разные амплитуды. (Колебания маятника b имеют меньшую амплитуду, чем маятника a.)

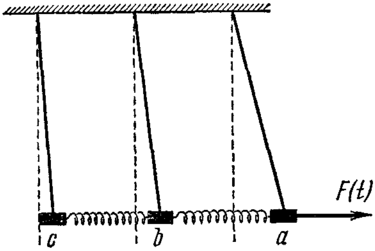

Рис. 3.7. Механический фильтр.
Частота вынуждающей силы меньше частоты первой моды. Относительные фазы маятников совпадают с фазами первой моды. Амплитуда «на выходе» (маятник c) меньше амплитуды «на входе» (маятник a).

Такой же результат будет и в случае системы из трех или более связанных маятников, находящихся под внешним воздействием, частота которого меньше частоты самой низкой моды. Относительные фазы колебаний маятников будут те же, что и в первой моде, а амплитуда будет уменьшаться с удалением от входа системы. Это показано на рис. 3.7. Лучший способ понять рис. 3.7 — это считать, что частота внешней силы равна нулю. Если сила постоянна, то маятники не будут двигаться, и интуиция немедленно подсказывает нам, что расположение маятников получится таким же, как на рис. 3.7.

Терминология. Диапазон частот, заключенный между нижней и верхней граничными частотами, называется *полосой пропускания фильтра*. Для частот внешнего воздействия, находящихся в пределах полосы пропускания, амплитуда на выходе сравнима с амплитудой на входе. Для частот внешнего воздействия вне полосы пропускания амплитуда на выходе меньше амплитуды на входе. Поэтому такая система называется *полосовым фильтром*. Если граничная частота со стороны низких частот равна нулю (т. е. если самая низкая мода имеет нулевую частоту), то система называется *фильтром низких частот*. Например, если в системе связанных маятников нити подвеса гирь сделать бесконечно длинными, то можно считать, что положение маятника всегда вертикально и возвращающей силы не возникает. (Действие нитей подвеса будет эквивалентно действию поверхности стола без трения.) В этом случае частота самой низкой моды равна нулю. Такая система представляет собой фильтр низких частот. Он пропускает частоты от нуля до верхней граничной частоты.

Если частота самой низкой моды отлична от нуля, а частота самой высокой моды бесконечно велика, то система называется *фильтром высоких частот*. Например, если в системе связанных маятников отношение K/M стремится к бесконечности, то мы получим фильтр высоких частот. Пружины в этом случае настолько жесткие (или массы настолько малы), что они всегда обеспечивают значительную величину возвращающей силы на единицу массы и единицу смещения, без постепенного уменьшения амплитуд, независимо от того, сколь велика частота вынуждающей силы.

Система из двух, трех или большего числа маятников, возбуждаемая с помощью проигрывателя, может быть хорошей иллюстрацией свойств полосового фильтра. (См. домашний опыт 3.16.)

Пример 4. *Механический полосовой фильтр*. Система из двух связанных маятников, возбуждаемая с одного из концов (рис. 3.3), представляет собой простой механический полосовой фильтр. Покажите (задача 3.28), что отношение входной и выходной амплитуд (затуханием пренебрегаем) равно

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} \approx \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\omega^2}, \tag{56}$$

где

$$\omega_1^2=\frac{g}{l}, \quad \omega_2^2=\frac{g}{l}+2\frac{K}{M}. \tag{57}$$

Заметим, что, когда частота ω равна одному из резонансных значений (ω_1 либо ω_2), отношение амплитуд такое же, каким оно было бы для соответствующей моды: $\psi_b/\psi_a=+1$ для $\omega=\omega_1$ и $\psi_b/\psi_a=-1$ для $\omega=\omega_2$. Когда ω становится меньше частоты самой низкой моды, отношение амплитуд остается положительным и уменьшается от $+1$ при $\omega=\omega_1$ до $(\omega_2^2-\omega_1^2)/(\omega_2^2+\omega_1^2)$ при $\omega=0$. Таким образом, колебания с частотой много меньшей, чем нижняя граничная частота, сильно ослабляются при прохождении через фильтр, если ширина полосы пропускания мала по сравнению со средней частотой полосы пропускания. Если ω больше ω_2, отношение амплитуд будет оставаться отрицательным. Оно уменьшается по величине с возрастанием ω и становится равным $-(\omega_2^2-\omega_1^2)/2\omega^2$ для существенно бо́льших частот. Таким образом, частоты, большие верхней граничной частоты, сильно ослабляются.

Пример 5. *Механический фильтр низких частот*. Рассмотрим систему из двух связанных маятников (рис. 3.3). Будем увеличивать высоту точек подвеса и длину струн (так чтобы гири остались на месте). Когда струны станут «бесконечно длинными», их можно считать вертикальными для любого конечного смещения масс. Сила тяжести не создает в этом случае возвращающей силы, и наша система эквивалентна системе связанных масс, находящихся на поверхности без трения. Частота, соответствующая самой низкой моде, $\omega_1^2=g/l$, будет стремиться к нулю. Таким образом, мы получаем фильтр низких частот, который пропускает частоты в диапазоне от нуля до верхней граничной частоты $\omega_2^2=2K/M$. (Этот результат справедлив и для системы из двух связанных пружиной масс, лежащих на поверхности без трения, к одной из которых приложена гармоническая сила.) Отношение амплитуд ψ_b/ψ_a определяется из уравнения (56) при ω_1, равном нулю:

$$\frac{\psi_b}{\psi_a}=\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2-2\omega^2}=\frac{K/M}{(K/M)-\omega^2}. \tag{58}$$

Это отношение равно $+1$ для нулевой частоты. Оно бесконечно (имеется в виду, что $\psi_a=0$) для $\omega^2={}^1/_2\omega_2^2$, равно -1 для верхней граничной частоты и становится очень малым (и отрицательным) на очень больших частотах.

Рассмотрим применение равенства (58). Предположим, что мы имеем очень тонкую и чувствительную аппаратуру, которая не может работать при горизонтальных вибрациях, но вертикальные вибрации допускаются. Установим нашу аппаратуру на плоской подставке, которая в свою очередь помещается на ровном горизонтальном столе без трения. Предположим, что стены, пол и потолок вибрируют с частотой 20 *гц* и более. Предположим также, что если подставка с прибором жестко прикреплена к стенам, то амплитуда колебаний будет в 100 раз больше допустимой. Пусть вес прибора и подставки 10 *кг*. Как нам быть? Прикрепим подставку с прибором к стене через низкочастотный фильтр, состоящий из двух пружин, оси которых совпадают с осями x и y. Положим, что каждая пружина имеет коэффициент жесткости K (его величину нужно будет определить). Движения по направлениям x и y независимы, так что можно рассматривать движение только по x. Будем считать, что стена в точке соединения с пружиной представляет собой движущийся элемент a, а прибор — это движущийся элемент b. Теперь, применяя к нашему случаю уравнение (58), будем считать, что мы имеем две массы, связанные пружиной, причем на массу a действует сила $F_0\cos\omega t$. Мы хотим, чтобы отношение ψ_b/ψ_a было меньше 10^{-2} для частот 20 *гц* и выше:

$$\frac{\psi_a}{\psi_b}=1-\frac{\omega^2}{K/M}=-100,$$

т. е.

$$\frac{K}{M}=\frac{\omega^2}{101}, \qquad \sqrt{\frac{K}{M}}\approx\frac{\omega}{10}.$$

Для неподвижной стены собственная угловая частота колебаний прибора и подставки равна $\sqrt{K/M}$. Мы видим, что если нужно ослабить частоты от частоты ν и выше в $10^{-2}=f$ раз, то коэффициент жесткости K пружины должен быть достаточно мал, чтобы собственная частота колебаний прибора была меньше $f^{1/2}\nu$. В нашем примере собственная частота должна быть меньше $20/10=2$ *гц*.

Другой пример. Предположим, что вам неудобно сидеть на полу, который вибрирует с частотой 20 *гц* (это может быть пол самолета или что-нибудь в этом роде), поэтому вы сидите на «подушке». Подушка уменьшает вертикальную вибрацию в 100 раз (теперь вам удобно). Как сильно продавится под вами подушка? (Задача 3.12.)

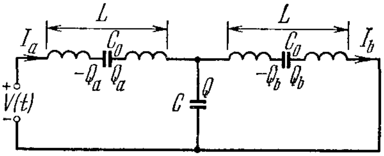

Рис. 3.8. Связанные LC-цепи, находящиеся под действием разности потенциалов $V(t)$.

Эта схема является электрическим аналогом двух связанных маятников (см. рис. 3.3).

Пример 6. *Электрический широкополосный фильтр.* Рассмотрим электрический аналог механической системы из двух связанных маятников, показанной на рис. 3.3. Каждая масса M заменяется индуктивностью L. Связывающие пружины с коэффициентом жесткости K заменяем емкостями с величиной обратной емкости C^{-1}. Возвращающая сила, происходящая от силы тяжести, зависит от величины смещения маятника и не зависит от его соединения с другим маятником. Аналогично этому мы хотим создать э. д. с. на каждой индуктивности независимо от ее связи с другими индуктивностями. Это можно сделать, разделив индуктивность на две части и включив емкость C_0 между ними. Пренебрежем активным сопротивлением R индуктивностей (это сопротивление проводов, из которых сделаны индуктивности). Все другие сопротивления пренебрежимо малы. Полученная нами система показана на рис. 3.8.

Представляем читателю найти уравнение движения и определить нормальные координаты и моды (задача 3.29). Приводим конечный результат, написанный по аналогии со связанными маятниками:

$$\left.\begin{aligned} &\text{мода 1:}\quad I_a=I_b, &&\omega_1^2=\frac{C_0^{-1}}{L};\\ &\text{мода 2:}\quad I_a=-I_b, &&\omega_2^2=\frac{C_0^{-1}}{L}+\frac{2C^{-1}}{L}. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Уменьшение амплитуды при прохождении через фильтр (в предположении, что нет затухания: мы пренебрегаем сопротивлением катушек) определяется выражением (56):

$$\frac{I_b}{I_a}=\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\omega^2}=\frac{1/LC}{(1/LC_0)+(1/LC)-\omega^2}. \tag{60}$$

Пример 7. *Электрический фильтр низких частот.* Если замкнуть конденсатор C_0 на рис. 3.8, то можно считать, что его емкость бесконечно велика. Частота колебаний для самой низкой моды стала при этом равной нулю, что соответствует установившемуся постоянному току. В этом случае мы получаем низкочастотный фильтр, изображенный на рис. 3.9. Отношение I_b/I_a следует из выражения (60), если принять, что $1/C_0$ равно нулю:

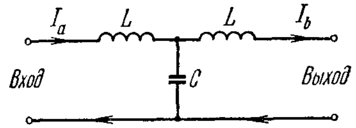

Рис. 3.9. Электрический фильтр низких частот.

$$\frac{I_b}{I_a}=\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2-2\omega^2}=\frac{1/LC}{(1/LC)-\omega^2}. \quad (61)$$

Пример 8. *Фильтр низких частот для выпрямителя.* Рассмотрим практическое применение выражения (61). Мы хотим сделать источник постоянного тока. Розетка на стене является источником переменного напряжения, среднеквадратичное значение которого равно 110 *в*, а частота 50 *гц*. Это напряжение подается на входную обмотку трансформатора. Выходная его обмотка может иметь больше витков, чем входная (повышающий трансформатор), или меньше витков (понижающий трансформатор) в зависимости от того, какую величину постоянного напряжения мы хотим получить. Выходная обмотка соединяется с диодом, который пропускает ток только в одном направлении. В этом случае мы имеем однополупериодный выпрямитель. На практике чаще используют двухполупериодное выпрямление, когда выходные концы подаются на два диода, соединенные так, что одну половину синусоиды пропускает один диод, а вторую — другой. Ток будет заряжать конденсатор, который можно рассматривать как источник постоянного напряжения. Однако заряд на емкости (и соответственно напряжение) не будет строго постоянным. С хорошим приближением можно считать, что заряд имеет постоянную составляющую, на которую наложены небольшие пульсации с частотой 100 *гц* (для случая двухполупериодного выпрямления). (Вопрос. Почему частота пульсаций в два раза больше частоты переменного напряжения сети?) Если заряженный конденсатор используется как источник постоянного напряжения для питания ламп радиоприемника или проигрывателя, то на выходе этих устройств мы услышим неприятное жужжание. (Оно хорошо слышно после включения радиоприемника, пока лампы не успели прогреться. Конечно, приемник, который питается от батареи, не будет жужжать на частоте 100 *гц*. Электрические часы или лампа дневного света имеют индуктивность, и вы можете слышать жужжание из-за механических напряжений в витках.)

Чтобы избавиться от жужжания на частоте 100 *гц*, подсоединим выходную емкость выпрямителя к индуктивности низкочастотного фильтра (рис. 3.9) и будем считать источником постоянного напряжения выход фильтра. Типичные значения L и C для обычного фильтра (см. любой справочник радиолюбителя) равны $L=10$ *гн* и $C=6$ *мкф*. Тогда верхняя граничная частота равна

$$\nu_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{LC}}=\frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{2}{10\cdot 6\cdot 10^{-6}}}=29{,}1\ гц.$$

Уменьшение амплитуды для составляющей, имеющей частоту 100 *гц*, получим из формулы (61):

$$\frac{I_b}{I_a}=\frac{\nu_2^2}{\nu_2^2-2\nu^2}=\frac{(29,1)^2}{(29,1)^2-2\,(100)^2}=-0,040.$$

Таким образом, пульсирующая компонента уменьшается в 25 раз. Постоянная составляющая фильтром не искажается.

3.5. Вынужденные колебания замкнутых систем со многими степенями свободы

В этом пункте мы рассмотрим установившееся движение системы из связанных маятников под действием внешней силы произвольной частоты ω. Вначале мы не будем обращать внимания ни на граничные условия, ни на способы связи движущихся элементов с внешними силами. (Последние можно включить в граничные условия.) Нас будет интересовать уравнение движения гири маятника, к которой непосредственно внешняя сила не приложена, и мы найдем общее решение для движения маятника с неопределенными граничными условиями. Конечно, в любом частном случае необходимо полностью определить граничные условия.

Пренебрегаем затуханием. Пренебрежем в уравнениях движения членами, относящимися к затуханию. Ограничит ли это общность наших результатов? В общем, да, но не очень сильно. Вспомним результат п. 3.3, где мы нашли, что когда частота ω не попадает в полосу любого из резонансов (т. е. частота ω далека от частоты любой из мод свободных колебаний), то смещение движущегося элемента представляет собой суперпозицию вкладов амплитуд дисперсии от каждой моды. Амплитудами поглощения можно пренебречь, так как они уменьшаются с частотой значительно быстрее амплитуд дисперсии. Как только ω отклонится от резонансного значения на 5—10 резонансных ширин, мы можем пренебречь амплитудами поглощения. Это равносильно приравниванию коэффициента затухания Γ нулю в результате. Будем считать, что $\Gamma=0$, но тем не менее существует некоторое трение, достаточное для образования установившихся колебаний, происходящих с частотой ω внешней силы. Действительно, без затухания система никогда не войдет в установившийся режим и будет совершать «бесконечные биения». Итак, предположим, что некоторое затухание существует, но будем рассматривать поведение системы вдали от резонанса. (Из п. 3.3 нам известно, как ведет себя система в области резонанса.)

Относительные фазы движущихся элементов. Важным следствием пренебрежения амплитудой поглощения является то, что вклад каждой моды (в смещение данного элемента) находится в фазе либо в противофазе с внешней силой $F_0 \cos(\omega t+\varphi_0)$. Действительно, в п. 3.3 было показано, что амплитуда дисперсии представляет собой константу (положительную или отрицательную), которая умножается на $\cos(\omega t+\varphi_0)$. К этому же результату можно прийти