

Уменьшение амплитуды для составляющей, имеющей частоту 100 *гц*, получим из формулы (61):

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{v_2^2}{v_2^2 - 2v^2} = \frac{(29,1)^2}{(29,1)^2 - 2(100)^2} = -0,040.$$

Таким образом, пульсирующая компонента уменьшается в 25 раз. Постоянная составляющая фильтром не искажается.

### 3.5. Вынужденные колебания замкнутых систем со многими степенями свободы

В этом пункте мы рассмотрим установившееся движение системы из связанных маятников под действием внешней силы произвольной частоты  $\omega$ . Вначале мы не будем обращать внимания ни на граничные условия, ни на способы связи движущихся элементов с внешними силами. (Последние можно включить в граничные условия.) Нас будет интересовать уравнение движения гири маятника, к которой непосредственно внешняя сила не приложена, и мы найдем общее решение для движения маятника с неопределенными граничными условиями. Конечно, в любом частном случае необходимо полностью определить граничные условия.

*Пренебрегаем затуханием.* Пренебрежем в уравнениях движения членами, относящимися к затуханию. Ограничит ли это общность наших результатов? В общем, да, но не очень сильно. Вспомним результат п. 3.3, где мы нашли, что когда частота  $\omega$  не попадает в полосу любого из резонансов (т. е. частота  $\omega$  далека от частоты любой из мод свободных колебаний), то смещение движущегося элемента представляет собой суперпозицию вкладов амплитуд дисперсии от каждой моды. Амплитудами поглощения можно пренебречь, так как они уменьшаются с частотой значительно быстрее амплитуд дисперсии. Как только  $\omega$  отклонится от резонансного значения на 5—10 резонансных ширин, мы можем пренебречь амплитудами поглощения. Это равносильно приравнению коэффициента затухания  $\Gamma$  нулю в результате. Будем считать, что  $\Gamma=0$ , но тем не менее существует некоторое трение, достаточное для образования установившихся колебаний, происходящих с частотой  $\omega$  внешней силы. Действительно, без затухания система никогда не войдет в установившийся режим и будет совершать «бесконечные биения». Итак, предположим, что некоторое затухание существует, но будем рассматривать поведение системы вдали от резонанса. (Из п. 3.3 нам известно, как ведет себя система в области резонанса.)

*Относительные фазы движущихся элементов.* Важным следствием пренебрежения амплитудой поглощения является то, что вклад каждой моды (в смещение данного элемента) находится в фазе либо в противофазе с внешней силой  $F_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Действительно, в п. 3.3 было показано, что амплитуда дисперсии представляет собой константу (положительную или отрицательную), которая умножается на  $\cos(\omega t + \varphi_0)$ . К этому же результату можно прийти

иначе. Предположим, что затухания нет, но тем не менее нам удалось заставить систему войти в установившийся режим, в котором она совершает колебания с частотой  $\omega$  внешней силы. Поскольку затухание отсутствует, то нет и рассеивания энергии. Поэтому приложенная внешняя сила не будет совершать никакой работы над движущимися элементами. Это значит, что смещение любого движущегося элемента либо находится в фазе, либо сдвинуто на  $180^\circ$  относительно внешней силы, т. е. мы имеем «чистые» амплитуды дисперсии.

Таким образом, мы получили важный результат: *в установившемся режиме (и для частоты  $\omega$ , далекой от резонанса) каждый движущийся элемент имеет одну и ту же фазу, совпадающую с фазой внешней силы.* (Мы считаем, что амплитуда каждого движущегося элемента может быть положительной или отрицательной, и не упоминаем о возможном  $180^\circ$ -градусном сдвиге.) Другой вывод заключается в том, что *возвращающая сила, приходящаяся на единицу массы и на единицу смещения, имеет одно и то же значение для всех движущихся элементов.* Это верно, потому что каждый движущийся элемент колеблется с одинаковой частотой. (Обратите внимание на то, что эти же условия справедливы для отдельной нормальной моды свободно колеблющейся системы без затухания!)

Теперь мы достаточно подготовлены, чтобы перейти к отдельным примерам.

**Пример 9. Связанные маятники.** Меняя названия (например, заменяя «длину струны» на «емкость» и «массу» на «индуктивность»)

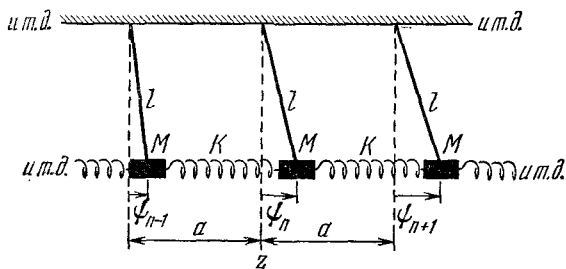


Рис. 3.10. Связанные маятники с неуказанными граничными условиями.

и рисуя новые схемы, мы можем, не повторяя вычислений, понять поведение весьма различных физических систем, основываясь на результатах, полученных для связанных маятников. (Мы часто так поступали в главе 2.) Здесь нас интересуют только связанные маятники.

На рис. 3.10 показаны три одинаковых связанных маятника, следующие один за другим (полное число маятников в последовательности не определено, и граничные условия не указаны). Уравнение движения для смещения  $\psi_n(t)$  гири  $n$ -го маятника имеет вид (для малых колебаний)

$$M\ddot{\psi}_n = -M\omega_0^2\psi_n + K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}), \quad (62)$$

где  $\omega_0^2 = g/l$ . Прежде чем изучать точное решение уравнения (62), рассмотрим его решение в непрерывном приближении. Это значит, что мы отказываемся от информации о движении для конфигураций, соответствующих самым высоким модам свободных колебаний, для которых соседние маятники имеют «лево-правую» конфигурацию. («Лево-правое» — это продольный аналог поперечного зигзага.) Мы должны будем поэтому ограничить себя сверху по частоте. Только имея точное решение, мы сможем рассмотреть частоты внешней силы, лежащие у верхней границы полосы пропускания и за ней.

*Непрерывное приближение.* Предположим, что  $\psi_n(t)$  медленно меняется с увеличением  $n$ . Это значит, что все маятники в небольшой окрестности маятника  $n$  (который имеет положение равновесия в точке  $z$ ) движутся приблизительно так же, как маятник  $n$ , так что смещение можно считать непрерывной функцией  $\psi(z, t)$ . Разложим соответствующие члены в уравнении (62) в ряд Тейлора:

$$\psi_n(t) = \psi(z, t),$$

$$\psi_{n+1}(t) = \psi(z+a, t) = \psi(z, t) + a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} + \dots,$$

$$\psi_{n-1}(t) = \psi(z-a, t) = \psi(z, t) - a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} + \dots$$

Таким образом,

$$\psi_{n+1} - \psi_n = a \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots,$$

$$\psi_n - \psi_{n-1} = a \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots$$

Подставив эти выражения (а также  $\ddot{\psi}_n(t) = \partial^2 \psi(z, t) / \partial t^2$ ) в уравнение (62), получим

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(z, t) + \frac{Ka^2}{M} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}}. \quad (63)$$

*Волновое уравнение Клейна — Гордона.* Уравнение (63) — знаменитое уравнение. Оно превращается в классическое волновое уравнение, когда  $\omega_0$  равно нулю. Его иногда называют «волновым уравнением Клейна — Гордона». (Оно справедливо для волн де Бройля в случае релятивистских свободных частиц. См. Д. 2.)

Мы предполагаем, что все движущиеся элементы находятся в установившемся режиме и колеблются с частотой  $\omega$  вынуждающей силы, что эта сила не совершает работы и что фазовые постоянные у всех движущихся элементов одинаковы. В этом случае

$$\psi(z, t) = \cos(\omega t + \varphi) A(z), \quad (64)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) A(z), \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{d^2 A(z)}{dz^2}. \quad (66)$$

Подставляя уравнения (64), (65) и (66) в (63) и сокращая на  $\cos(\omega t + \varphi)$ , получим дифференциальное уравнение для пространственной конфигурации  $A(z)$  маятников в установившемся режиме под действием силы с частотой  $\omega$ :

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = \frac{M}{K a^2} (\omega_0^2 - \omega^2) A(z). \quad (67)$$

Решения уравнения (67) сильно отличаются, если  $\omega^2 > \omega_0^2$  и  $\omega^2 < \omega_0^2$ . В первом случае мы получаем синусоидальные волны, которые были рассмотрены ранее (в п. 2.2) для непрерывной струны.

*Синусоидальные волны;  $\omega^2 > \omega_0^2$ .* При  $\omega^2 > \omega_0^2$  уравнение (67) имеет вид

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -k^2 A(z), \quad (68)$$

где  $k^2$  — положительная константа:

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2) \frac{M}{K a^2}. \quad (69)$$

Уравнение (69) представляет собой дисперсионное соотношение для волны в случае  $\omega^2 > \omega_0^2$ . Общее решение уравнения (68) имеет вид

$$A(z) = A \sin kz + B \cos kz, \quad (70)$$

где  $A$  и  $B$  — константы, определяемые из граничных условий. В зависимости от граничных условий существуют определенные волновые числа (и соответственно частоты внешнего воздействия), которые соответствуют «резонансу». Резонансные частоты совпадают с частотами нормальных мод (стоячих волн) свободно колеблющейся системы.

Теперь рассмотрим второй случай, имеющий важное значение.

*Экспоненциальные волны;  $\omega^2 < \omega_0^2$ .* Если  $\omega^2$  меньше  $\omega_0^2$ , мы определим положительную константу  $\kappa$  как положительный квадратный корень из положительной величины

$$\kappa^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{M}{K a^2}. \quad (71)$$

Уравнение (71) представляет собой дисперсионное соотношение для системы, у которой  $\omega^2 < \omega_0^2$ . В этом случае уравнение (67) принимает вид

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = \kappa^2 A(z). \quad (72)$$

Наличие плюса в правой части уравнения (72) дает решение, совершенно отличное от синусоидального решения уравнения (68). Решение уравнения (68), т. е. синусоидальная функция  $A(z)$ , определяемая решением (70), пересекает ось  $z$  и после пересечения меняет знак кривизны и снова пересекает ось и т. д., колеблясь в пространстве. В противоположность этому плюс в правой части уравнения (72) означает, что функция  $A(z)$  постоянно удаляется от оси  $z$ . Поэтому, если решение  $A(z)$  положительно и имеет положительный наклон (или отрицательно, с отрицательным

наклоном), то оно никогда не вернется на ось  $z$ . Если  $A(z)$  положительно и имеет отрицательный наклон, оно будет приближаться к оси  $z$  все более медленно с возрастанием  $z$ . Если  $A(z)$  в конце концов пересечет ось  $z$ , имея отрицательный наклон, то с ростом  $z$  отрицательное значение  $A(z)$  будет расти и  $A(z)$  больше не пересечет оси  $z$ .

Общее решение уравнения (72) представляет собой суперпозицию двух экспоненциальных функций:

$$A(z) = Ae^{-\kappa z} + Be^{+\kappa z}. \quad (73)$$

Чтобы убедиться в этом, продифференцируем это решение:

$$\begin{aligned} \frac{dA(z)}{dz} &= -\kappa Ae^{-\kappa z} + \kappa Be^{+\kappa z}, \\ \frac{d^2A(z)}{dz^2} &= (-\kappa)^2 Ae^{-\kappa z} + (\kappa)^2 Be^{+\kappa z} = \kappa^2 A(z). \end{aligned}$$

Мы видим, что решение (73) удовлетворяет уравнению (72). Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий. Таким образом, для  $\omega^2 < \omega_0^2$  общее решение  $\psi(z, t)$  имеет вид

$$\psi(z, t) = (Ae^{-\kappa z} + Be^{+\kappa z}) \cos(\omega t + \varphi). \quad (74)$$

*Связанные маятники как фильтр высоких частот.* Уравнение (74) дает общую форму экспоненциальной волны. Частота  $\omega_0^2 = g/l$  представляет собой граничную частоту для низких частот. Этого можно было ожидать, поскольку для простой системы из двух маятников было получено такое же выражение. На частоте самой низкой моды все маятники колеблются в фазе друг с другом и возвращающая сила образуется только за счет силы тяжести. Пружины не сжаты и не растянуты. Длина волны «бесконечна», т. е.  $\kappa$  равно нулю. Если к системе приложена внешняя сила с частотой, меньшей граничной частоты, то в системе не могут поддерживаться синусоидальные пространственные соотношения для относительных амплитуд колеблющихся грузов. В этом случае относительные амплитуды маятников будут экспоненциально зависеть от расстояния, как это следует из решения (73). Таким образом, система будет вести себя как высокочастотный фильтр. (В действительности она будет полосовым фильтром, но, пользуясь непрерывным приближением, мы не можем изучить отклик системы на колебания больших частот, в которых участвуют высокие моды с их «зигзагообразной» конфигурацией.)

Предположим, что сила приложена в точке  $z=0$  и что система простирается от  $z=0$  до  $z=L$  и в этой точке ( $z=L$ ) она привязана к жесткой стене. Интуитивно ясно, что, если воздействовать на систему с частотой, меньшей граничной частоты, амплитуда  $A(z)$  должна уменьшаться с увеличением расстояния  $z$  от точки приложения силы. Если система имеет очень большую длину, т. е.  $L$  велико, то в точке  $z=L$  амплитуда должна быть очень малой. В пределе, когда  $L$  бесконечно велико, амплитуда в точке  $z=L$  должна

равняться нулю. Это значит, что член  $B \exp(+xz)$  в уравнении (74) должен исчезнуть, т. е.  $B$  должно равняться нулю. Это правильная догадка. (См. задачу 3.30.)

На рис. 3.11 показан пример, соответствующий такому случаю. Заметим, что в этом примере не так уж важно, привязан ли конец в точке  $z=L$ . Если  $\kappa L \gg 1$ , то амплитуда колебаний станет равной нулю раньше, чем мы достигнем точки  $z=L$ . Таким образом, мы

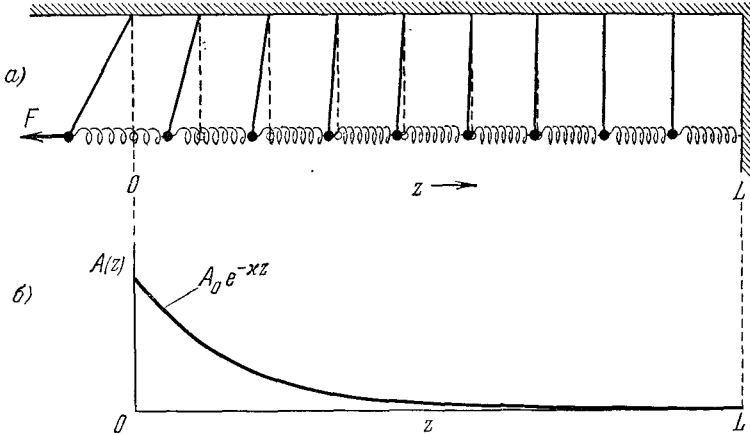


Рис. 3.11. Связанные маятники, на которые слева действует вынуждающая сила с частотой, меньшей пороговой частоты  $\omega_0$ .

а) Мгновенная конфигурация системы; б) график  $A(z)$ .

можем экспериментально осуществить «бесконечную» длину при конечном  $L$ , сделав  $L$  значительно больше  $1/\kappa$ . (См. домашний опыт 3.16.)

*Терминология для экспоненциальных волн.* Постоянная  $\kappa$  называется коэффициентом поглощения. Она характеризует относительное уменьшение амплитуды на единице длины. Рассмотрим амплитуду  $A(z)$ , образованную внешней силой на левом конце системы, достаточно длинной для того, чтобы иметь только убывающую экспоненту смещения:

$$\psi(z, t) = A(z) \cos \omega t, \quad (75)$$

где

$$A(z) = A e^{-\kappa z}. \quad (76)$$

$$-\frac{1}{A(z)} \frac{dA(z)}{dz} = \text{относительное уменьшение амплитуды}$$

на единице длины. (77)

Это выражение равно  $\kappa$ , если  $A(z)$  задано выражением (76). С другой стороны, когда  $A(z)$  равно  $B \exp(+xz)$ , амплитуда уменьшается при уменьшении  $z$ , а не при возрастании. Однако это не вызывает путаницы, и мы по-прежнему будем называть  $\kappa$  коэффициентом пог-

лощения. В случае общего решения  $A \exp(-\kappa z) + B \exp(+\kappa z)$  мы оставим то же название для  $\kappa$ , несмотря на то что для некоторых интервалов  $z$  амплитуда  $A(z)$  может возрастать, а для некоторых — уменьшаться.

Величина, обратная  $\kappa$ , представляет собой длину  $\delta$ , на которой амплитуда  $\exp(-\kappa z) = \exp(-z/\delta)$  уменьшается в  $e=2,718$  раз. Она называется *глубиной проникновения амплитуды* или просто *глубиной проникновения*:

$$1/\kappa = \delta. \quad (78)$$

Можно провести некоторую аналогию между коэффициентом поглощения  $\kappa$  для экспоненциально убывающих волн и волновым числом  $k$  для синусоидальных волн. В первом случае  $\kappa$  — это относительное ослабление амплитуды на единицу длины, во втором случае  $k$  — это число радиан на единицу длины. Точно так же есть некоторая аналогия между глубиной проникновения  $\delta$  и длиной волны  $\lambda$ :  $\delta$  — это расстояние, на котором амплитуда уменьшается в  $e$  раз, а  $\lambda$  — это расстояние, на котором фаза увеличивается на  $2\pi$ .

*Дисперсионные соотношения.* Если частота  $\omega$  больше *нижней граничной частоты*, то мы имеем синусоидальные волны, для которых частота и волновое число связаны уравнением (69). Перепишем его в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{Ka^2}{M}\right) k^2. \quad (79)$$

Для  $\omega$ , меньших нижней граничной частоты  $\omega_0$ , синусоидальных волн нет. (Они «срезаются».) В этом случае вместо синусоидальных волн имеем экспоненциальные волны. Частота  $\omega$  и коэффициент ослабления  $\kappa$  связаны соотношением (71), которое запишем в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{Ka^2}{M}\right) \kappa^2. \quad (80)$$

Выражения (79) и (80) представляют собой полное дисперсионное соотношение для системы (в непрерывном приближении).

Для частотного диапазона, в котором *вынужденные* колебания синусоидальны, дисперсионное соотношение (79) совпадает с дисперсионным соотношением для мод *свободных* колебаний. [См. п. 2.4, уравнения (2.90) — (2.92).] Это не случайно. При выводе дисперсионного соотношения в обоих случаях мы находили уравнение движения груза и затем предполагали, что все движущиеся элементы совершают гармоническое движение с одной частотой  $\omega$  (в одном случае с частотой моды, в другом — с частотой установившихся колебаний) и с одинаковой фазовой постоянной. Таким образом, это общий результат: *дисперсионное соотношение для вынужденных синусоидальных колебаний то же, что и для свободных колебаний.*

*Дисперсионная и реактивная среда.* В рассматриваемом нами примере «среда», в которой возникают волны, представляет собой систему связанных маятников. Если в среде могут существовать

синусоидальные волны, она называется *дисперсивной (или прозрачной) средой*. Это значит, что частота  $\omega$  не ниже граничной частоты  $\omega_0$ . Среда, в которой не может быть синусоидальных волн, но возможны экспоненциальные волны (без рассеяния энергии), называется *реактивной*. Одна и та же среда может быть реактивной на одних частотах и дисперсивной на других, как в случае связанных маятников.

**Пример 10. Ионосфера.** Ионосфера — это пример среды (для электромагнитных волн), которая дисперсивна (т. е. прозрачна) для частот, больших некоторой граничной частоты (эта частота называется также частотой колебаний плазмы  $\nu_p$ ), и реактивна (непрозрачна) для меньших частот. Дисперсионное соотношение для вынужденных колебаний в ионосфере очень похоже на дисперсионное соотношение для связанных маятников:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_p^2 + c^2 k^2, & \omega > \omega_p; \\ \omega^2 &= \omega_p^2 - c^2 \kappa^2, & \omega < \omega_p. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Частота колебаний плазмы — это частота самой низкой моды колебаний свободных электронов. Мы получили в п. 2.4 формулу (2.99). Типичные значения частоты колебаний плазмы  $\nu_p$  ( $=\omega_p/2\pi$ ) в дневное время лежат между 10 и 30 *Мгц*. Пусть «к одному концу ионосферы» приложена «сила», создаваемая некоторой радиостанцией, работающей на типичных широкополосных частотах амплитудной модуляции порядка  $\nu=1000$  *кГц*. В этом случае  $\nu \ll \nu_p$  и ионосфера ведет себя как реактивная среда. Электромагнитные волны экспоненциально затухают, аналогично тому, что происходило в случае связанных маятников (см. рис. 3.11). При этом над ионосферой не совершается никакой работы, так как скорости каждого электрона сдвинуты на  $\pm 90^\circ$  по фазе по отношению к окружающему их электрическому полю. В случае системы маятников (см. рис. 3.11) средняя энергия, сообщаемая системе внешней силой, также равна нулю (затуханием пренебрегаем). Энергия, которая сообщается маятнику, возвращается им обратно в течение цикла. Несколько иначе обстоит дело в случае радиостанции и ионосферы. Станция получает обратно очень малую часть переданной в ионосферу энергии. Ионосфера не поглощает энергию, но волны отражаются к Земле, захватывая большой район и не попадая в передатчик. Такое *отражение волн* от ионосферы обеспечивает техническую возможность передачи радиоволн на большие расстояния к приемникам, находящимся вне поля зрения из-за кривизны поверхности Земли. Все это справедливо, если  $\omega$  меньше граничной частоты  $\omega_p$ .

Типичные частоты телевидения и радиостанций, работающих на частотной модуляции, лежат около 100 *Мгц*. Эти частоты выше граничной частоты ионосферы, лежащей в пределах 10—30 *Мгц*. Таким образом, для этих частот (около 100 *Мгц*) ионосфера является дисперсивной средой. Можно сказать, что она прозрачна. Полного отражения электромагнитных волн к Земле уже не происходит, и ионосфера в этом случае не помогает нам в передаче радиосигналов, как



это происходило для радиостанций с амплитудной модуляцией. Передача оказывается возможной лишь на расстояния, ограниченные «лучом зрения».

Ионосфера является дисперсивной средой и для частот *видимого света*  $\nu \approx 10^{15}$  *гц*. Если бы она была реактивной средой для этих частот, мы не видели бы ни звезд, ни Солнца. В следующей главе мы выведем дисперсионное соотношение для ионосферы [уравнение (81)].

*Проникновение волн в реактивную область.* Когда ионосфера находится под воздействием радиостанции, частоты которой ниже граничной частоты, радиоволны *полностью отражаются* назад к Земле. Но отражение не происходит, так сказать, в одной точке, сразу. Рассмотрим аналогичную задачу для связанных маятников (у этой системы такое же дисперсионное соотношение, что и у ионосферы) в непрерывном приближении. Предположим, что на гири первого маятника (в точке  $z=0$ ) действует вынуждающая сила  $\psi_1(t) = A_0 \cos \omega t$ . В области между  $z=0$  и  $z=L$  находится некоторое количество связанных маятников, длина каждого из них  $l_1$ , причем

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_1} < \omega^2. \quad (82)$$

Таким образом, область, занимаемая этими маятниками (мы будем ее называть областью 1), дисперсивна. (Внешняя сила — это «радиостанция». Область от  $z=0$  до  $z=L$  — «обычный воздух», а не «плазма».) При  $z=L$  нити подвеса маятников внезапно становятся короче. Каждая нить имеет теперь длину  $l_2$ , так что

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_2} > \omega^2. \quad (83)$$

Эта область (область 2) реактивна. (Область 2 — это «плазма».) Пусть она простирается до бесконечности ( $z=\infty$ ). Описанная система показана на рис. 3.12.

Найдем функцию  $\psi(z, t)$ , которая для  $z=0$  равна  $A_0 \cos \omega t$ . Для любого  $z$  будем иметь

$$\psi(z, t) = A(z) \cos \omega t, \quad (84)$$

где  $A(z)$  подлежит определению. Амплитуда  $A(z)$  для реактивной области (область 2), т. е. для  $z$  между  $L$  и бесконечностью, должна иметь вид

$$A_2(z) = C e^{-\kappa(z-L)}, \quad (85)$$

где  $C$  — неизвестная константа, а  $\kappa$  определяется равенством

$$\kappa^2 = \frac{M}{K a^2} \left( \frac{g}{l_2} - \omega^2 \right), \quad (86)$$

где  $\omega^2 \leq g/l_2$ . В дисперсивной области между  $z=0$  и  $z=L$   $A(z)$  имеет вид

$$A_1(z) = A \sin k(z-L) + B \cos k(z-L), \quad (87)$$

где  $A$  и  $B$  — неизвестные константы, а  $k$  дается соотношением

$$k^2 = \frac{M}{Ka^2} \left( \omega^2 - \frac{g}{l_1} \right), \quad (88)$$

причем  $\omega^2 > g/l_1$ . Введем теперь граничные условия. При  $z=L$  функции  $A_1(z)$  и  $A_2(z)$  должны гладко соединяться, т. е. должны

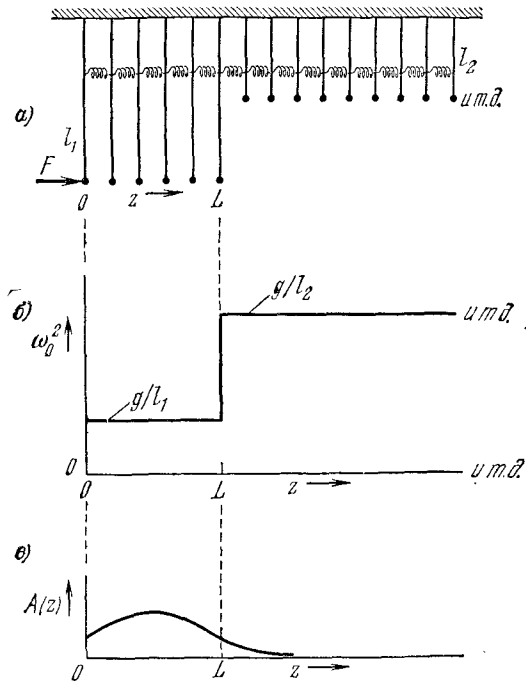


Рис. 3.12. Система связанных маятников с внезапным изменением  $\omega_0^2$  в точке  $z=L$ . а) Система. Маятник в точке  $z=0$  связан с вынуждающей силой. б) График зависимости  $\omega_0^2$  от  $z$ . Для вынуждающих частот в интервале от  $\sqrt{g/l_1}$  до  $\sqrt{g/l_2}$  область 1 (от  $z=0$  до  $z=L$ ) является дисперсионной, а область 2 (от  $z=L$  до  $z=\infty$ ) — реактивной. в) График зависимости амплитуды  $A$  от  $z$ , когда частота вынуждающей силы близка к самой низкой резонансной частоте системы.

быть равны их значения и производные (наклоны) в точке  $z=L$ . Приравнивание значений обеих функций в точке  $z=L$  дает  $B=C$ . Приравнивание производных дает  $kA = -\kappa C$ . Таким образом, для области 1 имеем

$$A_1(z) = C \left[ \frac{-\kappa}{k} \sin k(z-L) + \cos k(z-L) \right]. \quad (89)$$

Граничные условия для  $z=0$ :  $A_1(z) = A_0$  в  $z=0$ , и из уравнения (89) получаем

$$C = \frac{A_0}{\frac{\kappa}{k} \sin kL + \cos kL}. \quad (90)$$

Полное решение определится уравнениями (84), (85), (89) и (90) и дисперсионными соотношениями (86) и (88).

*Резонанс.* Знаменатель в уравнении (90) обращается в нуль для ряда значений  $kL$ , что дает бесконечное значение для  $C$ . (Если учесть затухание, мы не получим бесконечно большой амплитуды.) Эти значения  $kL$  определяют резонансные частоты системы. Для нахождения резонансных частот можно воспользоваться и дисперсионным соотношением. (См. задачу 3.31.) Амплитуда  $A(z)$  для частоты  $\omega$ , близкой к частоте первого резонанса, показана на рис. 3.12. Здесь  $C$  было взято большим, но не бесконечным.

«Ограниченные в пространстве» моды. Из рис. 3.12, в следует, что реактивная (поглощающая) область последовательности маятников (она лежит между  $z=L$  и  $z=\infty$ ) действует подобно «мягкой стенке». Маятник, расположенный в точке  $z=L$ , не закреплен, но, несмотря на это, на расстоянии нескольких глубин проникновения, за  $z=L$ , смещение маятников пренебрежимо мало. Этот результат позволяет предположить, что, ограничив дисперсивную область с обеих сторон реактивными областями, мы получим в дисперсивной области почти такие же моды (свободных колебаний), что и в последовательности маятников, ограниченной двумя стенками. Такое предположение верно. Назовем эти моды «ограниченными». Они возникают на частотах, примерно равных резонансным частотам системы, показанной на рис. 3.12.

Интересным свойством «ограниченных» мод является то, что число их конечно, даже если число маятников в дисперсивной области сколь угодно велико. Дело в том, что частоты «ограниченных» мод имеют в качестве верхнего предела частоту  $\sqrt{g/l_2}$ . Для  $\omega^2 > g/l_2$  внешняя область становится дисперсивной, и колебания не будут больше ограничены центральной (дисперсивной) областью между двумя «стенками».

В квантовой физике волны де Бройля для электронов в атоме ведут в себя в определенном смысле подобно «ограниченным» модам рассматриваемой системы маятников. Такие состояния электронов называются стационарными состояниями. Пример квантовой системы со стационарными состояниями (их называют еще связанными состояниями электрона) рассмотрен в дополнении (см. Д.3).

*Точное решение для вынужденных колебаний системы связанных маятников.* Мы рассматривали свойства вынужденных колебаний связанных маятников в непрерывном приближении. Найдем теперь точное решение уравнения движения маятника, находящегося в ряду связанных маятников. Перепишем уравнение (62):

$$\ddot{\psi}_n = -\omega_0^2 \psi_n + \frac{K}{M} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}). \quad (91)$$

Предположив, что все движущиеся элементы совершают гармоническое движение с одинаковой частотой и фазой

$$\psi_n = A_n \cos \omega t, \quad (92)$$

получим

$$-\omega^2 A_n = -\omega_0^2 A_n - \frac{2K}{M} A_n + \frac{2K}{M} \left( \frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{2} \right),$$

т. е.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \left( 1 - \frac{1/2 (A_{n+1} + A_{n-1})}{A_n} \right). \quad (93)$$

*Дисперсивная область частот.* (В радиотехнике она называется «полосой пропускания».) В дисперсивной области колебания синусоидальны в пространстве. Предположим, что решение имеет вид

$$A_n = A \sin kna + B \cos kna, \quad (94)$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} A_{n+1} &= A \sin (kna + ka) + B \cos (kna + ka), \\ A_{n-1} &= A \sin (kna - ka) + B \cos (kna - ka) \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

и

$$\begin{aligned} A_{n+1} + A_{n-1} &= 2A \sin kna \cos ka + 2B \cos kna \cos ka = \\ &= 2 \cos ka (A \sin kna + B \cos kna) = (2 \cos ka) A_n. \end{aligned} \quad (96)$$

Подставляя этот результат в уравнение (93), получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} (1 - \cos ka), \quad (97)$$

т. е.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (98)$$

Уравнение (98) представляет собой закон дисперсии для дисперсивной области частот. Оно определяет частоты от  $\omega^2 = \omega_0^2$  до  $\omega^2 = \omega_0^2 + 4K/M$ , что соответствует значениям  $ka$  от  $ka=0$  до  $ka=\pi$ . Уравнение (98) — точно такое же дисперсионное соотношение, которое было получено для системы свободно колеблющихся маятников [см. уравнение (2.90) п. 2.4].

*Нижняя реактивная область.* Используя наш опыт нахождения решений в случае непрерывного приближения, предположим, что общее решение для частот, меньших нижней граничной частоты  $\omega_0$ , имеет вид экспоненциальной волны:

$$A_n = Ae^{-\kappa na} + Be^{+\kappa na}. \quad (99)$$

Тогда

$$A_{n+1} + A_{n-1} = (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) A_n. \quad (100)$$

Из уравнения (93) получаем закон дисперсии

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \left[ 1 - \frac{1}{2} (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) \right]. \quad (101)$$

Уравнение (101) можно привести к виду, похожему на уравнения (97) и (98). Используя гиперболические синусы и косинусы [см. приложение I, уравнения (11) и (13)], находим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} (1 - \operatorname{ch} \kappa a) \quad (102)$$

или

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M} \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \kappa a. \quad (103)$$

При  $\omega = \omega_0$ , уравнение (98) дает  $k=0$  и уравнение (103) также дает  $\kappa=0$ . Это соответствует плоским волнам, и, таким образом, мы получили совпадение характера волн на границе.

*Верхняя реактивная область.* Эта область включает в себя частоты, большие верхней частоты  $\omega_{\max}$ , где  $\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 + 4K/M$ . Мы познакомились с этой областью при изучении фильтров с двумя

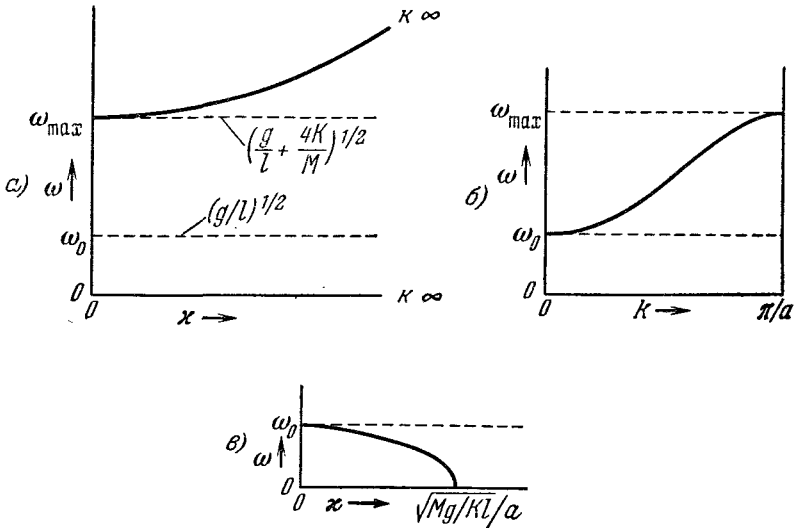


Рис. 3.13. Полное дисперсионное соотношение для связанных маятников.

а) Частота больше высокочастотного порога: волны являются зигзагообразными экспоненциальными волнами; б) область дисперсионных частот: синусоидальные волны; в) частота меньше низкочастотного порога: экспоненциальные волны.

степенями свободы. Мы нашли, что вынужденные колебания с частотой большей, чем верхняя частота, имеют «зигзагообразную» форму, подобную той, которую имеют самые высокие моды, и что они также уменьшаются по амплитуде с удалением от входа системы. (См. рис. 3.6.) Предположим, что форма  $A_n$  определяется экспоненциальной «зигзагообразной» волной:

$$A_n = (-1)^n (Ae^{-\kappa na} + Be^{+\kappa na}). \quad (104)$$

Тогда мы получим результат, отличающийся от уравнения (100) только знаком:

$$A_{n+1} + A_{n-1} = -A_n (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}).$$

Уравнение (93) даст закон дисперсии

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) \right\} = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \{ 1 + \operatorname{ch} \kappa a \}, \quad (105)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} \kappa a. \quad (106)$$

При  $\kappa=0$   $\omega^2=\omega_0^2+4K/M=\omega_{\max}^2$ . Таким образом, точно на верхней граничной частоте  $\omega_{\max}$  у нас нет ослабления.

На рис. 3.13 показано полное дисперсионное соотношение для всех частот в соответствии с уравнениями (98), (103) и (106).

### Задачи и домашние опыты

3.1. Выполните алгебраические действия, необходимые для получения равенства (10):

$$E = E_0 e^{-t/\tau}.$$

3.2. С помощью подстановки покажите, что смещение  $x_1(t)$ , определяемое уравнением (3), является решением уравнения (2) движения гармонического затухающего осциллятора.

3.3. Покажите, что если  $x_1(t)$  является решением уравнения (1) для вынуждающей силы  $F_1(t)$  и  $x_2(t)$  — решением для другой вынуждающей силы  $F_2(t)$ , то сила  $F(t)=F_1(t)+F_2(t)$  соответствует решению  $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$  при условии, что начальные условия  $x(0)$  и  $\dot{x}(0)$  для суперпозиции определяются суммой начальных условий, т. е.  $x(0)=x_1(0)+x_2(0)$  и  $\dot{x}(0)=\dot{x}_1(0)+\dot{x}_2(0)$ .

3.4. С помощью подстановки покажите, что уравнения (15), (16) и (17) определяют решение уравнения (14).

3.5. Опыт. *Установление биений (переходные биения)*. Для этого и некоторых последующих опытов понадобится проигрыватель, вращающийся диск которого используется для периодического воздействия на маятник. В качестве гири маятника можно взять любой груз, например банку консервов. Удобно работать с диском, вращающимся со скоростью 45 об/мин. (Чему равна соответствующая этому числу оборотов длина нити маятника?) Укрепите на диске проигрывателя легкую картонную коробку, а к коробке прикрепите карандаш в вертикальном положении. Наденные на карандаш веревочную петлю, к петле привяжите конец 2—3-метрового резинового жгута. Другой конец жгута прикрепите к нити маятника. Измерьте с помощью часов с секундной стрелкой частоту свободных колебаний маятника. Измерьте частоту биений, когда на маятник действует вынуждающая сила со стороны вращающегося диска. Сделайте это для различных длин маятника.

Введите в систему затухания, заставив тереться обо что-либо нить маятника. (Можно использовать щель между двумя предметами, например книгами.) Большая длина резинового жгута взята для того, чтобы ослабить его действие как пружины. Лучше всего привязать резиновый жгут к нити маятника вблизи точки подвеса, так чтобы амплитуда движения нити в этой точке была значительно меньше амплитуды движения карандаша (на вертушке), даже для больших амплитуд маятника. Это обеспечит независимость возмущающей силы от амплитуды движения маятника.

3.6. Докажите справедливость выражения (22) для потерь мощности на трение. Докажите, что эти потери равны входной мощности [выражение (21)].

3.7. Опыт. *Резонанс в «пружине» с затуханием*. Растяните «пружину» примерно на 2,5 м и закрепите концы. Один конец должен быть закреплен так, чтобы его можно было легко освободить и закрепить снова после изменения числа витков между закрепленными концами. (Мы можем таким образом менять натяжение «пружины», не меняя ее длины.) Будем действовать на «пружину» с помощью вращающегося диска проигрывателя, соединенного с нею длинным резиновым жгутом (см. опыт 3.5). Пусть скорость вращения диска равна 45 об/мин. Измерьте частоту свободных колебаний «пружины». Эту частоту можно изменять, меняя число витков между закрепленными концами (см. опыт. 2.1). *Измерьте среднее время затухания  $\tau$* . Увеличьте затухание, натянув вдоль «пружины» длинную ленту, так, чтобы в результате получить время затухания в пределах от 10 до 20 сек. *Постройте резонансную кривую*, т. е. график зависимости  $|A|^2$  от  $\omega_0$  при фиксированном  $\omega$ , равном 45 об/мин. Наблюдайте за фазовыми соотношениями и убедитесь в том, что вы их понимаете. Величину  $|A|$  можно измерить с помощью источника света, дающего резкую тень (точечный источник света). Определите