При $\varkappa=0$ $\omega^2=\omega_0^2+4K/M=\omega_{\max}^2$. Таким образом, точно на верхней граничной частоте $\omega_{\max}$ у нас нет ослабления.

На рис. 3.13 показано полное дисперсионное соотношение для всех частот в соответствии с уравнениями (98), (103) и (106).

Задачи и домашние опыты

3.1. Выполните алгебраические действия, необходимые для получения равенства (10):

$$E=E_0e^{-t/\tau}.$$

3.2. С помощью подстановки покажите, что смещение $x_1(t)$, определяемое уравнением (3), является решением уравнения (2) движения гармонического затухающего осциллятора.

3.3. Покажите, что если $x_1(t)$ является решением уравнения (1) для вынуждающей силы $F_1(t)$ и $x_2(t)$ — решением для другой вынуждающей силы $F_2(t)$, то силе $F(t)=F_1(t)+F_2(t)$ соответствует решение $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ при условии, что начальные условия $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ для суперпозиции определяются суммой начальных условий, т. е. $x(0)=x_1(0)+x_2(0)$ и $\dot{x}(0)=\dot{x}_1(0)+\dot{x}_2(0)$.

3.4. С помощью подстановки покажите, что уравнения (15), (16) и (17) определяют решение уравнения (14).

3.5. Опыт. *Установление биений (переходные биения).* Для этого и некоторых последующих опытов понадобится проигрыватель, вращающийся диск которого используется для периодического воздействия на маятник. В качестве гири маятника можно взять любой груз, например банку консервов. Удобно работать с диском, вращающимся со скоростью 45 *об/мин*. (Чему равна соответствующая этому числу оборотов длина нити маятника?) Укрепите на диске проигрывателя легкую картонную коробку, а к коробке прикрепите карандаш в вертикальном положении. Наденьте на карандаш веревочную петлю, к петле привяжите конец 2—3-метрового резинового жгута. Другой конец жгута прикрепите к нити маятника. Измерьте с помощью часов с секундной стрелкой частоту свободных колебаний маятника. Измерьте частоту биений, когда на маятник действует вынуждающая сила со стороны вращающегося диска. Сделайте это для различных длин маятника.

Введите в систему затухания, заставив тереться обо что-либо нить маятника. (Можно использовать щель между двумя предметами, например книгами.) Большая длина резинового жгута взята для того, чтобы ослабить его действие как пружины. Лучше всего привязать резиновый жгут к нити маятника вблизи точки подвеса, так чтобы амплитуда движения нити в этой точке была значительно меньше амплитуды движения карандаша (на вертушке), даже для больших амплитуд маятника. Это обеспечит независимость возмущающей силы от амплитуды движения маятника.

3.6. Докажите справедливость выражения (22) для потерь мощности на трение. Докажите, что эти потери равны входной мощности [выражение (21)].

3.7. Опыт. *Резонанс в «пружине» с затуханием.* Растяните «пружину» примерно на 2,5 *м* и закрепите концы. Один конец должен быть закреплен так, чтобы его можно было легко освободить и закрепить снова после изменения числа витков между закрепленными концами. (Мы можем таким образом менять натяжение «пружины», не меняя ее длины.) Будем действовать на «пружину» с помощью вращающегося диска проигрывателя, соединенного с нею длинным резиновым жгутом (см. опыт 3.5). Пусть скорость вращения диска равна 45 *об/мин*. Измерьте частоту свободных колебаний «пружины». Эту частоту можно изменять, меняя число витков между закрепленными концами (см. опыт. 2.1). *Измерьте среднее время затухания* τ. Увеличьте затухание, натянув вдоль «пружины» длинную ленту, так, чтобы в результате получить время затухания в пределах от 10 до 20 *сек*. *Постройте резонансную кривую*, т. е. график зависимости $|A|^2$ от ω_0 при фиксированном ω, равном 45 *об/мин*. Наблюдайте за фазовыми соотношениями и убедитесь в том, что вы их понимаете. Величину $|A|$ можно измерить с помощью источника света, дающего резкую тень (точечный источник света). Определите положения тени (на полу или стене) от кусочка ленты, прикрепленного к «пружине». Вычислите ожидаемую ширину резонансной кривой на уровне половины максимума. (Вы можете изменить время затухания, если резонанс получается слишком узким или слишком велико время исчезновения переходных биений.)

Возможные источники трудностей. Если резиновый жгут, соединяющий один конец «пружины» и карандаш на диске проигрывателя, полностью расслабляется в одном из положений диска и затем резко натягивается, то сила, действующая со стороны резинового жгута (вспомните о фурье-анализе), будет содержать гармоники частоты 45 *об/мин*, а не только эту частоту. Соответственно будут возбуждаться гармоники «пружины». Это затруднение весьма интересно и поучительно. *Другая трудность.* Тряхните резиновый жгут и наблюдайте за его колебаниями. Убедитесь в том, что частота его колебаний гораздо больше 45 *об/мин*. В противном случае в нашем опыте возникнут неожиданные препятствия. Вы можете столкнуться и с другими проблемами. Интересно заметить исчезновение дисперсионной амплитуды и появление амплитуды поглощения вблизи резонанса. Для этого нужно наблюдать за относительной фазой диска (т. е. за карандашом) и «пружины». Чему равно произведение полной резонансной ширины на среднее время затухания? Согласуется ли ваш результат (если принять во внимание ошибки опыта) с уравнением (28)?

3.8. Опыт. *Вынужденные колебания системы из двух связанных маятников.* Система показана на рис. 3.3, а соответствующая теория разобрана в пп. 3.3 и 3.4. Нити, на которых подвешены грузы, можно наматывать на горизонтально расположенную палку. Это дает возможность менять частоты маятников. Палки могут быть закреплены на столе, книжном шкафу или другим образом. Нужно иметь возможность менять длину веревок в пределах 30÷70 *см*. Меняя длину нитей, вы меняете ω_1^2 и ω_2^2 таким образом, что их разность остается постоянной. Поэтому изменение длины нити при постоянной частоте возмущающей силы почти эквивалентно изменению частоты возмущающего воздействия при постоянных ω_1^2 и ω_2^2. Для данных длин нитей измерьте частоты обеих мод (при отсоединенном жгуте). Затем подсоедините маятники к диску, вращающемуся со скоростью 45 *об/мин*, и возбудите продольные колебания «пружины». Легко заметить, что продольные и поперечные моды имеют одинаковые наборы частот. Это может создать помехи для опыта, особенно вблизи резонанса, но наблюдать такие помехи поучительно. Имеется пять представляющих особый интерес частот. Это две резонансные частоты, частота, лежащая посередине между ними, и области частот значительно больших, чем резонансные, и значительно меньших. Вспомните характеристики фильтра выше и ниже граничной частоты. Изучите и поймите фазовые соотношения. При отсутствии затухания переходные биения могут длиться очень долго. Лучше всего внести затухание, заставив нити тереться обо что-либо. Вероятно, наблюдение резонансных кривых потребует много времени. (Можете это не делать, если вы выполнили опыт 3.7.) Вместо этого измерьте времена затухания для обеих мод и определите ожидаемую ширину резонанса Γ, используя соотношение $\Delta\nu\tau=1$. Совпадает ли ваш результат с ситуацией, разобранной на рис. 3.4? Справедливы ли здесь уравнения для механического фильтра (п. 3.4)?

Другой способ изменения частоты заключается, очевидно, в использовании различных скоростей вращения диска, которые могут принимать значения 78, 45, 33 и 16 *об/мин*. К сожалению, скорость вращения диска нельзя менять непрерывно.

3.9. Отбойный молоток бьет асфальт с частотой 20 *гц*. Рукоятка молотка воздействует на руки рабочего с такой же частотой. Разработайте низкочастотный фильтр и, соединив его с рукояткой, уменьшите амплитуду ее вибраций в 10 раз. Один способ заключается в десятикратном увеличении массы той части молотка, которая испытывает отдачу. Поскольку молоток и без этого весит около 20 *кГ*, попытайтесь воспользоваться пружинами и массами.

3.10. Докажите, что среднее во времени значение запасенной энергии для установившихся колебаний определяется выражением (23).

3.11. Докажите, что точки половинной мощности для резонансной кривой в установившемся режиме определяются выражениями (25) и (26).

3.12. *Механический фильтр* (см. п. 3.4). Весьма чувствительный прибор находится на полу, совершающем вертикальные колебания с частотой около 20 *гц*. Вы хотите ослабить эти колебания в 100 раз и поэтому кладете прибор на «подушку». Как низко опустится вершина «подушки», когда вы положите на нее прибор? (Указание. См. пример, следующий за уравнением (58), п. 3.4. «Подушку» можно аппроксимировать идеальной, т. е. подчиняющейся закону Гука, пружиной.)

Ответ. Около 6 *см*.

3.13. Покажите, что уравнение (31) дает точное решение уравнения (14) для осциллятора, находящегося под внешним воздействием (в установившемся режиме), когда коэффициент затухания Γ равен нулю.

3.14. Покажите, что если маятники (рис. 3.10) соединены с помощью «пружин», то они имеют такие же уравнения движения для поперечных колебаний в горизонтальной плоскости, как и для показанного на рисунке продольного движения.

3.15. Нарисуйте систему индуктивностей и емкостей, которая описывалась бы уравнениями движения, аналогичными уравнению (62), и выведите уравнения движения.

3.16. Опыт. *Механический полосовой фильтр*. Имея лишь два связанных маятника, невозможно наблюдать экспоненциальный характер фильтрации, так как через две точки может проходить любая кривая. Поместите между двумя маятниками третий, чтобы получилась система, показанная на рис. 3.6 или 3.7. С помощью вращающегося диска проигрывателя воздействуйте на систему с частотой, большей и меньшей частоты среза. Измерьте отношения ψ_a/ψ_b и ψ_a/ψ_c. Равны ли они? Должны ли они быть равны?

3.17. Предположим, что у ионосферы существует резкая граница, где граничная частота ν_p скачком возрастает от 0 до 20 *Мгц*. Найдите глубину проникновения δ для амплитуды радиоволн с частотой 1000 *кгц*.

Ответ. Около 2,5 *м* независимо от частоты, пока $\omega \ll \omega_p$.

3.18. Напишите закон дисперсии для системы связанных индуктивностей и емкостей, используя в качестве аналога систему связанных маятников. Нас интересует закон дисперсии в полосе пропускания и в окрестности обеих граничных частот.

3.19. Покажите, что если мы используем приближение слабого затухания и находимся достаточно близко от резонанса, то амплитуда поглощения и амплитуда дисперсии могут быть записаны (при соответствующем выборе единиц) в следующем виде:

$$A_{\text{п}} = \frac{1}{x^2+1}, \quad A_{\text{д}} = \frac{-x}{x^2+1},$$

где $x = (\omega - \omega_0)/{}^1/_2\Gamma$.

3.20. Предположим, что имеем систему с двумя резонансами (на частотах ω_1 и ω_2), которые дают одинаковый вклад в амплитуду дисперсии некоторого движущегося элемента. Для частоты ω, далекой как от ω_1, так и от ω_2, имеем

$$A_{\text{д}} = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}.$$

Покажите, что если ω отличается от ω_1 и ω_2 на величину значительно большую, чем их разность $\omega_2 - \omega_1$, то $A_{\text{д}}$ (в хорошем приближении) в два раза больше любого из слагаемых. Иными словами, покажите, что

$$A_{\text{д}} = \left(\frac{2}{\omega_{\text{ср}}^2 - \omega^2}\right)\{1 + \varepsilon^2 + \ldots\},$$

где

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\omega_{\text{ср}}^2 - \omega^2}.$$

3.21. Рассмотрим дисперсионное соотношение для связанных маятников (уравнения (98), (103) и (106)). Положим, что $a/\lambda \ll 1$ и $a/\delta \ll 1$. В этом случае непрерывное приближение будет достаточно хорошим. (Почему?) Разложите дисперсионное соотношение в ряд Тейлора и оставьте первый член разложения. Сравните результат с тем, который был получен для непрерывного приближения, п. 3.5.

3.22. *Бесконечные переходные биения* (см. п. 3.2). Покажите, что переходные колебания осциллятора с нулевым затуханием имеют вид «амплитудно-модулированных почти гармонических колебаний», т. е. подтвердите уравнение (43).

Покажите, что в случае нулевого затухания и совпадения частоты вынуждающей силы с резонансной частотой модулированная амплитуда линейно растет со временем [уравнение (45)].

3.23. Опыт. *Экспоненциальное проникновение волн в реактивную область.* Соберите систему из маятников и «пружин», показанную на рис. 3.12. Воздействуйте на один конец системы с помощью вращающегося проигрывателя. Выберите длины маятников так, чтобы частота 78 *об/мин* была больше верхней граничной частоты, частота 45 *об/мин* лежала бы в полосе пропускания, а частота 33 *об/мин* (и 16 *об/мин*) была меньше нижней граничной частоты. Если вы придумаете быстрый и легкий способ одновременно менять длину всех маятников, то сможете непрерывно изменять ω_0^2 (а тем самым и все резонансные частоты), сохраняя частоту внешнего воздействия постоянной, и искать резонансы.

3.24. *Переходные биения.* Получите уравнение (46), которое определяет зависимость от времени энергии, запасенной осциллятором, находящимся под внешним воздействием. В момент $t=0$ энергия равна нулю. Считайте, что затухание мало. Пусть частота внешнего воздействия близка (но не точно равна) к ω_1. Там, где это возможно, положите $\omega/\omega_1=1$. (Например, в выражении типа $\cos\omega t - \cos\omega_1 t$ нельзя положить $\omega=\omega_1$, поскольку, какой бы малой ни была разница между ω и ω_1, она в конечном счете приведет к большим эффектам, т. е. к большим сдвигам фазы.)

3.25. Покажите, что решение для осциллятора с большим затуханием [уравнение (9), п. 3.2] следует из решения (7) и формулы (8). (Указание. Докажите тождества $\cos ix=\operatorname{ch} x$, $\sin ix=i\operatorname{sh} x$; воспользуйтесь ими.)

3.26. *Критическое затухание.* Исходя из решения для свободных колебаний с затуханием [уравнение (7)], покажите, что для критического затухания решение имеет вид

$$x_1(t)=e^{-{}^1/_2\Gamma t}\left\{x_1(0)+\left[\dot{x}_1(0)+\frac{1}{2}\Gamma x_1(0)\right]t\right\}.$$

Покажите, что такой же результат получится, если исходить из решения для осциллятора с большим затуханием [уравнение (9)].

3.27. Опыт. *Ширина резонанса для картонной трубки.* Прочитайте абзацы, следующие за формулой (28). Для самой низкой нормальной моды колебаний звуковых волн в трубке, открытой с обоих концов, длина трубки практически равна половине длины волны. (В действительности, благодаря краевым эффектам, длина трубки меньше половины длины волны приблизительно на один диаметр трубки.) Скорость звука около 330 *м/сек.* Если вы работаете с камертоном C523, то громче всего будет резонировать трубка, длина которой близка к 32 *см.*

а) Проверьте это утверждение. Резонансная частота ν_0 для трубки с длиной L равна

$$\nu_0=\frac{523}{(L/L_0)}=\frac{\omega_0}{2\pi},$$

где $L_0\approx 32$ *см* (L_0 не равно точно 32 *см* в связи со сказанным выше).

б) Проверьте эту формулу. Теперь нарежьте 5 или 6 трубок со значениями L, специально выбранными так, чтобы «покрыть» резонансный пик и две точки половинной мощности с каждой стороны пика. Следует считать, что интенсивность звука I будет иметь «резонансную форму»

$$I=\frac{({}^1/_2\Gamma)^2}{(\omega_0-\omega)^2+({}^1/_2\Gamma)^2}.$$

Здесь величина I нормирована так, чтобы $I=1{,}0$, при $\omega=\omega_0$. В нашем опыте частота внешнего воздействия ω определяется частотой камертона и поэтому постоянна. Резонансная частота изменяется с изменением длины трубки. Вы должны найти длину трубки L_0, отвечающую резонансу (легче всего это сделать на слух, ударяя по трубке и сравнивая слышимый звук со звуком камертона). После этого следует найти две длины трубок, соответствующие точкам половинной мощности. Таким образом вы сможете оценить ширину резонанса, т. е. величину Г, а следовательно, и время затухания колебаний. Основная трудность в этом опыте — придумать способ, с помощью которого можно оценить двукратное уменьшение интенсивности звука.

3.28. *Два связанных маятника как механический полосовой фильтр.* Рассмотрите систему, показанную на рис. 3.3 и описанную в п. 3.3. Пренебрегая затуханием, покажите, что

$$\psi_a \approx \frac{F_0}{2M}\cos\omega t\left\{\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}+\frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right\},$$

$$\psi_b \approx \frac{F_0}{2M}\cos\omega t\left\{\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}-\frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right\}$$

и

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} \approx \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\omega^2},$$

где ω_1 и ω_2 — соответственно меньшая и большая частота двух мод, а ω — частота внешнего воздействия.

3.29. *Электрический полосовой фильтр.* Рассмотрите фильтр, показанный на рис. 3.8. Найдите дифференциальные уравнения для I_a и I_b. Покажите, что нормальные координаты равны I_a+I_b и I_a-I_b и что моды колебаний определяются уравнениями (59).

3.30. *Связанные маятники.* Рассмотрим линейную последовательность связанных маятников, на которые в точке $z=0$ действует вынуждающая периодическая сила. Ее частота меньше граничной частоты. В точке $z=L$ система прикреплена к твердой стене, как показано на рис. 3.11. Покажите, что если в $z=0$ $\psi(z,t)$ равно $A_0\cos\omega t$, то $\psi(z,t)=A(z)\cos\omega t$, где

$$A(z)=A_0\frac{[e^{-\varkappa z}-e^{-\varkappa L}e^{-\varkappa(L-z)}]}{1-e^{-2\varkappa L}}.$$

Обратите внимание на то, что для $L\to\infty$ это выражение просто равно $A_0e^{-\varkappa z}$.

3.31. *Резонанс в системе связанных маятников.* Прочтите рассуждения, следующие за уравнением (90). Найдите резонансные значения ω^2 следующим образом.

а) Покажите, что при резонансе имеет место равенство

$$k\operatorname{ctg}kL=-\varkappa,$$

из которого следует, что резонансные значения $\theta\equiv kL$ должны лежать во II квадранте ($90\div810°$), IV квадранте ($270\div360°$), VI, VIII и т. п. квадрантах.

б) Будем измерять возвращающую силу, приходящуюся на единицу смещения и на единицу массы (т. е. ω^2), в единицах Ka^2/ML^2. Обозначим $g/l_1=\omega_1^2$, $g/l_2=\omega_2^2$. Покажите, что резонансные значения ω^2 можно получить, построив график двух функций

$$\omega^2=\omega_1^2+\theta^2,\qquad \omega^2=\omega_2^2-\theta^2\operatorname{ctg}^2\theta$$

относительно θ.

Резонансы определяются половиной точек пересечения двух кривых. Почему только половиной? (З а м е ч а н и е. Обратите внимание на то, что ω^2, ω_1^2 и ω_2^2 безразмерны в приведенных выше выражениях, т. е. что они даны в единицах Ka^2/ML^2.) Постройте график распределения резонансных частот. Что происходит при очень высоких частотах?

3.32. *Полное отражение видимого света от посеребренного зеркала.* Предположим, что валентный электрон атома серебра становится «свободным» электроном в твердом куске серебра. Посмотрите (в справочниках по химии и физике), чему равны валентность, атомный вес и плотность серебра. Найдите число свободных электронов в единице объема твердого серебра. Предположим, что дисперсионное соотношение для света в серебре имеет такой же вид, как и для света (или другого электромагнитного излучения) в ионосфере, т. е.

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2, \text{ если } \omega^2 \geq \omega_p^2,$$
$$\omega^2 = \omega_p^2 - c^2\varkappa^2, \text{ если } \omega^2 \leq \omega_p^2,$$

где $\omega_p = 4\pi Ne^2/m$, а e и m — заряд и масса электрона.

а) Вычислите критическую частоту ν_p для твердого серебра. Покажите, что частота ν для видимого света меньше критической граничной частоты. Поэтому следует ожидать, что достаточно толстый слой серебра обеспечит полное отражение нормально падающего видимого света. Это и происходит в случае посеребренного зеркала.

б) Вычислите среднюю глубину проникновения δ для красного света (длина волны в вакууме $0{,}65\cdot 10^{-4}$ *см*) и для голубого света (длина волны в вакууме $0{,}45\cdot 10^{-4}$ *см*). Полупосеребренное зеркало представляет собой пластинку стекла, на которую нанесен слой серебра с толщиной, меньшей глубины проникновения, так что примерно около половины света проходит через зеркало (т. е. отражение не полное). Предположим, что вы смотрите через полупосеребренное зеркало на «белую» лампу. («Белый» свет в действительности содержит все видимые цвета.) Будет ли пропущенный свет белым? Будет ли он иметь голубой или красный оттенок? Что можно сказать про отраженный свет?

в) Какой толщины должен быть слой серебра, чтобы интенсивность голубого цвета (интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды) уменьшилась в 100 раз на задней поверхности слоя серебра? Такое зеркало должно отражать 99% падающего света. (В действительности для видимого света отражение близко к 95%. Мы пренебрегли потерями энергии, связанными с активным сопротивлением серебра. Кроме того, поверхность серебра может тускнеть из-за образования окиси серебра, свойства которой отличны от свойств металлического серебра.)

г) Для каких частот слой серебра становится прозрачным? (Укажите соответствующую длину волны в вакууме. Излучение такой частоты называется «ультрафиолетовым» светом.)

3.33. Опыт. *Пилообразные стоячие волны в мелкой воде.* Такие волны были рассмотрены в задаче 2.31. Здесь мы хотим узнать, как возбудить самую низкую пилообразную моду в сосуде с водой. Самая низкая мода — это мода «омывания»; она состоит только из половинки зубца. Поверхность воды плоская, и длина сосуда равна половине длины волны. Следующая пилообразная мода будет иметь один полный зубец, т. е. длина сосуда будет равна одной длине волны (первой фурье-компоненты пилообразного зубца). Эта мода не возбуждается, когда вы толкаете сосуд туда и обратно. *Объясните, почему.* Третья мода состоит из 1,5 зубца, т. е. из трех плоских участков. Таким образом, длина сосуда соответствует трем половинам длины волны. Попробуйте возбудить эту моду, слегка потряхивая сосуд. Убедившись в том, что эта мода возбуждена, наблюдайте свободные колебания. После некоторой практики вы сможете легко возбуждать и опознавать эту моду. Приведем более надежный способ. Достаньте метроном или сделайте его сами, воспользовавшись маятником, который производит звук, ударяя по бумаге или еще чему-либо. Установив метроном на определенную частоту, покачивайте сосуд в такт с метрономом до тех пор, пока не получите установившееся состояние. Меняйте частоту метронома, чтобы найти резонанс. Вблизи резонанса вы можете наблюдать *переходные биения.* Они не только красивы; по ним можно судить, как далека система от резонанса. Вычислите ожидаемую резонансную частоту, используя соотношение $\lambda\nu = \sqrt{gh}$. Подсчитайте эту частоту заранее, чтобы быстро достичь резонанса, установив нужную частоту метронома. Когда вы достигните резонанса, предоставьте воде колебаться и измерьте время затухания свободных колебаний.

Если сосуд достаточно легок, так что масса сосуда с водой определяется главным образом массой воды, и если полная масса достаточно велика, чтобы сообщить достаточную отдачу, то резонанс можно почувствовать по ощущению отдачи в руках. В этом случае нет нужды в метрономе. Вы сможете видеть всплески, если возбудите пилообразные волны в обоих горизонтальных направлениях. В результате вода будет выбрасываться в воздух. Линейная теория колебаний не в силах объяснить это явление.

3.34. Опыт. *Прямоугольные двухмерные стоячие волны.* Возьмите прямоугольную коробку из полиэтилена, в которой хранят лед, или другой подобный сосуд. Наполните его до краев водой и затем добавьте воды настолько, чтобы переполнить сосуд. (Это уменьшит затухание, вносимое сторонами коробки.) Легонько стукните по коробке и наблюдайте свободные колебания стоячих волн. Достаньте гироскоп (детскую игрушку). Поднесите вращающийся гироскоп к одной стороне коробки. Вы сможете наблюдать постепенное уменьшение длин волн вынужденных колебаний (стоячие волны) по мере уменьшения скорости вращения гироскопа. Вероятно, вам удастся наблюдать и прохождение через резонанс.

3.35. Опыт. *Стоячие волны в воде.*

а) Погрузите вибрирующий камертон в воду и наблюдайте за волнами, особенно за волнами между стержнями камертона.

б) Расположите вибрирующий камертон над поверхностью воды и смотрите в пространство между стержнями камертона. (Некоторые моды камертона быстро затухают. Имеется одна, которая существует несколько секунд.) Попытайтесь осветить камертон под различными углами с помощью небольшой лампочки (параллельно и перпендикулярно гребням), чтобы увидеть удивительную «структуру» колебаний.

3.36. *Гармоники и субгармоники.* Дан гармонический осциллятор с частотой собственных колебаний $\nu_0=10$ *гц* и очень большим временем релаксации. Если на осциллятор действует гармоническая сила с частотой 10 *гц*, то амплитуда колебаний осциллятора станет большой, т. е. он будет резонировать с частотой возбуждающей силы. Никакая другая гармоническая сила не сможет вызвать колебаний со столь большой амплитудой. (Очевидно, нужно сравнивать силы одинаковой величины, но разной частоты.)

а) Докажите это утверждение. Предположим далее, что осциллятор подвержен действию силы, которая представляет собой повторяющиеся с периодом 1 *сек* прямоугольные импульсы длительностью 0,01 *сек*.

б) Опишите качественно результаты фурье-анализа повторяющихся прямоугольных импульсов.

в) Будет ли гармонический осциллятор резонировать (т. е. приобретать большую амплитуду) под действием этой внешней силы?

г) Положим, что внешняя сила имеет вид таких же импульсов (длительностью 0,01 *сек*), но с периодом 0,5 *сек*. Будет ли осциллятор резонировать? Ответьте на тот же вопрос, если скорость повторения импульсов равна 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 *сек*.

д) Теперь перейдем к новым явлениям. Что произойдет, если действовать на осциллятор импульсами с частотой повторения 20 *гц*? Будет ли осциллятор резонировать? Обратите внимание, что частота осциллятора в этом случае является субгармоникой основной частоты повторения вынуждающих импульсов.

е) Рассмотрите случай, когда частота повторения импульсов внешней силы кратна 3, 4 и т. д. собственным частотам осциллятора. Будет ли осциллятор резонировать? Объясните, что будет происходить.

ж) Теперь опять несколько новых явлений. Предположим, что внешняя сила действует на осциллятор только в те моменты времени, когда его смещения от положения равновесия положительны. Так происходит, например, когда вы раскачиваете качели. Рассмотрите вопрос о возбуждении субгармоник для этого случая. Предположим, что качели колеблются с частотой 1 *гц*. Если вы будете производить толчки с частотой 2 *гц* (независимо от того, где находятся качели, т. е. часть толчков может быть сделана впустую), будут ли качели резонировать? Тот же вопрос для частоты 3 и 3,5 *гц*. Теперь объясните, почему высокочастотные колебания мотора самолета могут возбудить резонанс на значительно более низких частотах, которые являются субгармониками возмущающей частоты, т. е. составляют $^1/_2$, $^1/_3$ и т. д. от этой частоты. Считаете ли вы, что возбуждение субгармоник — обычное явление для вибрирующих систем? Объясните.