

Для постоянного тока I

$$LI = \frac{1}{c} \Phi. \quad (58)$$

Решая уравнения (56), (57) и (58) относительно L , найдем, что погонная самоиндукция равна

$$\frac{L}{a} = \frac{4\pi g}{c^2 \omega}. \quad (59)$$

Возможно, вас несколько смущает наше вычисление самоиндукции с помощью постоянного тока, тогда как уравнение Максвелла, из которого следует уравнение (57) для постоянного тока, имеет вид (том II, п.7.13)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (60)$$

Мы пренебрегаем током смещения, определяемым членом $(1/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$. Оказывается (задача 4.10), что такое пренебрежение законно, пока толщина d_0 каждой пластины удовлетворяет условию

$$d_0 \ll \lambda. \quad (61)$$

Будем считать, что это условие выполняется.

Фазовая скорость бегущих волн равна [используем равенства (48), (55) и (59)]

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{(L/a)(C/a)}} = c. \quad (62)$$

Мы нашли, что в двух различных примерах передающих линий из проводов и пластин фазовая скорость равна c . Поэтому кажется правдоподобным и более общий результат: *фазовая скорость для любой передающей линии, состоящей из двух изолированных, одинаковых, прямых и параллельных проводников, в вакууме равна c .*

4.3. Показатель преломления и дисперсия

Если все пространство между параллельными пластинами передающей линии заполнено диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ , то емкость увеличивается в ϵ раз (см. том II, п. 9.9). (То же справедливо и для передающей линии из двух проводников, только в этом случае мы должны заполнить диэлектриком все пространство. В случае параллельных пластин электрическое поле вне области между пластинами равно нулю и поэтому не имеет значения, есть ли диэлектрик вне пластин, или его там нет.)

Аналогично, если магнитная проницаемость среды равна μ , то погонная самоиндукция L возрастает в μ раз. (Мы будем рассматривать такие материалы, как стекло, вода, воздух или им подобные, для которых магнитная проницаемость равна единице. В дальнейшем при общих выводах мы будем учитывать μ , а при рассмотрении частных примеров будем полагать μ равным единице.) Фазовая скорость бегущих волн напряжения и тока, распространяющихся вдоль

передающей линии из параллельных пластин (или вдоль любой другой передающей линии, образованной прямыми и параллельными проводниками), находящихся в пространстве, заполненном веществом с диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ , равна

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{a}{L} \frac{a}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} v_{\phi} \text{ (вакуум),}$$

т. е.

$$\boxed{v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}.} \quad (63)$$

Выражение (63), полученное для специального случая бегущих волн напряжения или тока в передающей линии, на самом деле имеет весьма общее значение. Оно справедливо для распространяющихся в веществе электромагнитных волн любого типа, например для видимого света, распространяющегося в стекле или в другом диэлектрике.

Убедимся в общности выражения (63). Мы показали, что оно справедливо для волн тока и напряжения в передающей линии. В пространстве между пластинами передающей линии сосредоточено электрическое и магнитное поля. (Электрическое поле определяется напряжением на пластинах, а магнитное поле — током, текущим вдоль них.) Поэтому магнитное и электрическое поля должны распространяться вдоль линии с такой же скоростью, с какой распространяются волны тока и напряжения. (Поля представляют собой те же волны: они изменяются в пространстве и времени и имеют все характеристики, соответствующие волне.) В случае, когда среда — вакуум, скорость равна c . Мы знаем, что c — это скорость любых электромагнитных волн в вакууме, в частности электромагнитных волн, распространяющихся между пластинами передающей линии. Если пространство заполнено средой с постоянными ϵ и μ , то скорость волн электрического и магнитного полей (связанных с волнами напряжения и тока) равна $c/\sqrt{\epsilon\mu}$.

Очевидно, что с такой скоростью в данном веществе распространяются любые электромагнитные волны, каков бы ни был их источник: это скорость как для электромагнитных волн, связанных с напряжением и током, так и для электромагнитных волн, созданных лампой накаливания или испущенных радиоантенной или звездой.

В главе 1—3 мы пытались показать, что *дисперсионное соотношение зависит не от граничных условий, а только от свойств среды и волн*. Электромагнитные волны могут быть образованы при помощи напряжения, приложенного к одному концу передающей линии, или при помощи передающей антенны. Этим двум случаям соответствуют различные граничные условия, т. е. различные способы воздействия на систему. (Система — это среда с постоянными μ и ϵ .) Закон дисперсии, выражаемый формулой (63), не зависит от этих

условий. Мы не доказали этого строго, но надеемся, что наши слова достаточно убедительны. (Отложим доказательство до главы 7.)

Формула (63) справедлива для любого электромагнитного излучения и, в частности, для света. (Более подробно мы будем рассматривать электромагнитное излучение в главе 7.) Величину $\sqrt{\mu\epsilon}$ называют показателем преломления и обозначают буквой n . Полезно запомнить приведенные ниже выражения, в которые входит показатель преломления. Следует иметь в виду, что показатель преломления стекла для видимого света близок к 1,5. Из приведенных ниже выражений видно, как меняются величины λ и k в стекле по сравнению с вакуумом:

$$n = \frac{c}{v_{\text{ф}}} = \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (64)$$

$$\lambda = \frac{1}{n} \frac{c}{\nu} = \frac{1}{n} \lambda (\text{вакуум}), \quad (65)$$

$$k = n \frac{\omega}{c} = nk (\text{вакуум}). \quad (66)$$

Конечно, среда не может изменить частоту «вынуждающей силы». Поэтому вместо того, чтобы писать λ (вакуум), мы можем записать эту величину как c/ν . Аналогично k (вакуум) = ω/c . В стекле длина волны видимого света составляет приблизительно $2/3$ от длины волны в вакууме. Соответственно число длин волн на один сантиметр, $\sigma = 1/\lambda$, больше в 1,5 раза в стекле, чем в вакууме.

Таблица 4.1

Название вещества	Показатель преломления для $\lambda = 5893 \text{ \AA}$
Воздух (при нормальных условиях)	1,0002926
Вода (20 °C)	1,33
Цинковый крон (стекло)	1,52
Тяжелое свинцовое стекло	1,90
Люцит	1,50

В табл. 4.1 приведены значения показателей преломления обычных веществ для желтой линии натрия с длиной волны $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$). Полезно запомнить примерные значения показателя преломления следующих веществ: для стекла и пластика $n \approx 3/2$, для воды $n \approx 4/3$ и для воздуха $n \approx 1 + 0,3 \cdot 10^{-3}$.

Изменение показателя преломления с цветом — дисперсия. Призма (кусоч стекла или другого прозрачного материала клинообразной формы) отклоняет пучок падающего света на величину, которая зависит от цвета, т. е. от длины волны света. Различные цвета из параллельного пучка «белого» света отклоняются на разные углы. Пучки выходят из призмы под разными углами, и на эк-

ране за призмой получается цветное изображение, подобное радуге. Это схематически показано на рис. 4.5.

Преломление и закон Снеллиуса. Пучок света определенного цвета отклоняется (преломляется) всякий раз, когда на его пути

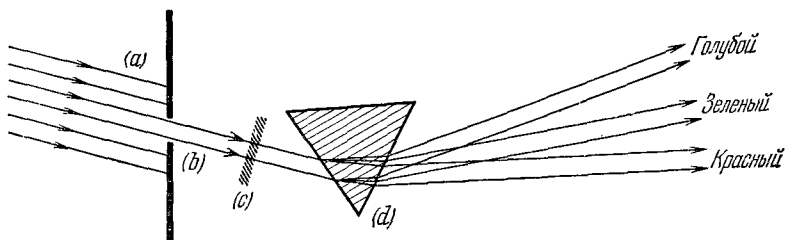


Рис. 4.5. Дисперсия.

Солнечный свет (а) падает на непрозрачный экран со щелью (b), перпендикулярной плоскости рисунка. Пучок белого света, образованный щелью, проходит через фильтр (с), пропускающий определенный цвет, и через призму (d). Отклонение в призме зависит от цвета. Голубой цвет отклоняется сильнее красного. Без фильтра мы видим все цвета, разложенные в той же последовательности, что и в радуге.

встречается поверхность, где фазовая скорость принимает новое значение, т. е. при изменении коэффициента преломления n . Величина отклонения зависит от отношения n_1/n_2 коэффициентов преломления среды 1 (из которой пучок выходит) и среды 2 (в которую пучок входит). Преломление зависит также и от угла падения. Углом падения называется угол между направлением падающего пучка и нормалью к поверхности, на которую падает пучок. Угол преломления определяется как угол между преломленным пучком и нормалью к поверхности. (Мы будем всегда считать углы падения и преломления положительными углами, заключенными в пределах от 0 до 90° .) Принятые определения иллюстрируются рис. 4.6.

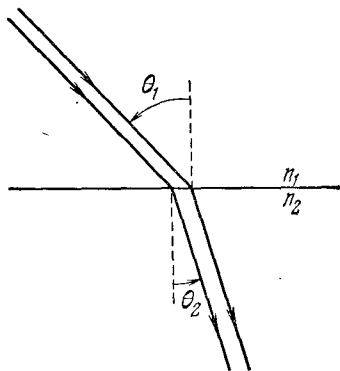


Рис. 4.6. Обозначения.

Для света, падающего в направлении стрелок, θ_1 — угол падения, θ_2 — угол преломления.

Легко получить соотношение между n_1/n_2 и углами θ_1 и θ_2 . Фронт волны перпендикулярен направлению распространения пучка света. Положим, что фронт достигает границы сред, где показатель преломления возрастает (например, границы воздух — стекло). Один край фронта волны достигает границы раньше другого. Поэтому на одном краю фазовая скорость уменьшилась, в то время как на другом (еще не достигшем границы) она сохраняет свое значение. Из-за этого угол, под которым распространяется фронт, изменится. То же происходит и в том случае, если в ряду марширующих один фланг замедлил скорость передвижения, а другой нет. Рис. 4.7 иллюстрирует сказанное.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника, имеющих общую гипотенузу x (рис. 4.7). Имеем

$$l_1 = x \sin \theta_1, \quad l_2 = x \sin \theta_2. \quad (67)$$

Пусть t — это время, необходимое бегущей волне, чтобы пройти расстояние l_1 в среде 1 или расстояние l_2 в среде 2.

Тогда

$$l_1 = \frac{ct}{n_1}, \quad l_2 = \frac{ct}{n_2}, \quad (68)$$

или

$$ct = n_1 l_1 = n_2 l_2.$$

Используя (67), получим

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (69)$$

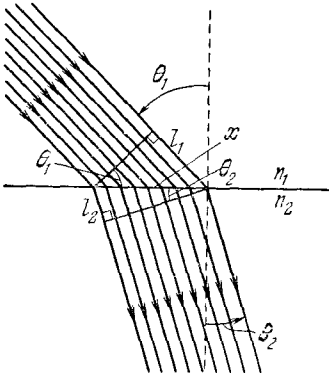


Рис. 4.7. Преломление.

Если $n_2 > n_1$, то правая точка фронта волны (если смотреть по ходу лучей) проходит расстояние l_2 , которое меньше расстояния l_1 , проходимого левой точкой. Поэтому пучок поворачивается к нормали, что показано на рисунке.

Зависимость (69) называется *законом преломления Снеллиуса*.

Дисперсия в стекле. Теперь мы понимаем, что дисперсия в призме возникает из-за того, что *показатель преломления n для голубого цвета больше, чем для красного*.

В табл. 4.2 приведены некоторые значения величины $n(\lambda)$ для оптического стекла, имеющего название «цинковый крон», взятые

Таблица 4.2

Дисперсия показателя преломления стекла

Цвет	$\lambda, \text{ \AA}$	$\lambda, \text{ мкм}$	$\nu, 10^{14} \text{ гц}$	n
Ближний ультрафиолет	3610	0,361	8,31	1,539
Темно-голубой	4340	0,434	6,92	1,528
Голубовато-зеленый	4860	0,486	6,18	1,523
Желтый	5890	0,589	5,10	1,517
Красный	6560	0,656	4,57	1,514
Темно-красный	7680	0,768	3,91	1,511
Инфракрасный	12000	1,20	2,50	1,505
Далекий инфракрасный	20000	2,00	1,50	1,497

из справочника по физике. Длины волн даны в \AA (10^{-8} см) и микро-нах (10^{-4} см), а частоты — в герцах (гц).

Содержание табл. 4.2 можно описать следующим образом. Коэффициент преломления для стекла близок к 1,5 для всего видимого диапазона частот. *Дисперсия*, т. е. скорость изменения n в зависи-

мости от λ , такова, что n увеличивается примерно на 0,006 на каждые 1000 Å уменьшения длины волны.

Дисперсию воды можно исследовать с помощью простой призмы, сделанной из двух предметных стекол микроскопа (с применением замазки и ленты), и фильтра, который поглощает зеленый, но пропускает красный и голубой цвета. (См. домашний опыт 4.12.)

Почему показатель преломления меняется с частотой? Вернемся к передающей линии. Фазовая скорость для нее равна

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{(C/a)(L/a)}}.$$

При увеличении C фазовая скорость уменьшается, так как уменьшается возвращающая сила $C^{-1}a$ для данного заряда. Фазовая скорость будет уменьшаться и при увеличении L , так как при этом возрастает инерция.

Рассмотрим вещества, для которых магнитная проницаемость $\mu = 1,0$. (Для стекла μ отличается от единицы лишь в пятом знаке после запятой.) Таким образом, нам нужно понять, почему выражение

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n} \quad (70)$$

зависит от частоты.

Мы знаем (см. том II, п. 9.9), что если конденсатор заполнен диэлектриком и электрическое поле, вызванное зарядом Q на пластинах конденсатора, равно $E_Q(t)$, то поле $E(t)$ в какой-либо точке диэлектрика равно суперпозиции $E_Q(t)$ и поля $-4\pi P$, являющегося результатом электрической поляризации:

$$E(t) = E_Q(t) - 4\pi P(t). \quad (71)$$

Здесь $P(t)$ — индуцированный дипольный момент на единицу объема:

$$P(t) = Nqx(t)\hat{x}. \quad (72)$$

В этой формуле N — плотность поляризуемых зарядов (число зарядов в единице объема), q — величина заряда, $x(t)$ — смещение заряда от положения равновесия и \hat{x} — единичный вектор. Будем считать, что E_Q , E и P направлены вдоль \hat{x} , и опустим обозначения векторов. Так как емкость C равна $C = Q/V$ (где V — разность потенциалов между пластинами), то уменьшение электрического поля, вызванное поляризацией диэлектрика (и пропорциональное уменьшению V), вызывает увеличение C . Коэффициент, на который умножается C , называют диэлектрической постоянной ϵ . Таким образом, в соответствии с уравнениями (71) и (72) мы имеем

$$\epsilon = \frac{E_Q}{E} = 1 + \frac{4\pi P(t)}{E(t)} = 1 + \frac{4\pi Nqx(t)}{E(t)}. \quad (73)$$

Пример 6. Простая модель «молекулы стекла». Несмотря на простоту модели, которую мы будем рассматривать, она достаточно хорошо отражает существенные черты любой классической

(т. е. доквантовой) модели взаимодействия света с веществом. Мы увидим, что наша модель дает возможность предсказать много замечательных свойств этого явления. Хотя квантовомеханическое описание единственно правильное, классическое описание ему не противоречит, а является его предельным случаем.

Предположим, что «молекула стекла» состоит из тяжелого неподвижного ядра, с которым связан заряд q , имеющий относительно малую массу M . Заряд «прикреплен» к ядру «пружиной» с коэффициентом жесткости $M\omega_0^2$. Движение заряда затухает, и коэффициент затухания равен Γ . Уравнение движения заряда q имеет вид

$$M\ddot{x} = -M\omega_0^2 x - M\Gamma\dot{x} + qE(t). \quad (74)$$

Предположим, что внешнее поле $E_0(t)$ гармонически меняется с угловой частотой ω . В этом случае $P(t)$ и $\dot{E}(t)$ будут изменяться с той же частотой ω и поле, действующее на некоторую «среднюю» молекулу, будет иметь вид

$$E(t) = E_0 \cos \omega t. \quad (75)$$

В этом случае уравнение (74) описывает движение гармонического осциллятора, находящегося под гармоническим внешним воздействием (см. п. 3.2), причем $F_0 = qE_0$. Для установившихся колебаний решение $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = A_d \cos \omega t + A_n \sin \omega t, \quad (76)$$

где A_d и A_n — амплитуда дисперсии и амплитуда поглощения. У молекул бесцветного прозрачного вещества (например, стекла или воды) в видимом диапазоне частот нет резонансов. (Именно поэтому вещество прозрачно и бесцветно.) Для цветного стекла или какого-нибудь фильтра из вашего оптического набора в видимом диапазоне частот имеются резонансы. Эти резонансы вызывают поглощение энергии на резонансных частотах, определяемое членом $A_n \sin \omega t$. При поглощении выпадает часть падающего белого света, и остается только тот свет, который вы видите. Мы не будем рассматривать поведение цветных фильтров на частотах, близких к резонансным частотам поглощения. Поэтому пренебрежем членом $A_n \sin \omega t$ в уравнении (76). Из главы 3 нам известно, что вдали от резонанса такое приближение является достаточно хорошим. Общий случай (включая поглощение) рассмотрен в дополнении 9. Коэффициент преломления определяется выражением

$$n^2 = \varepsilon = 1 + 4\pi Nq \frac{x(t)}{E(t)} = 1 + 4\pi Nq \frac{A_d}{E_0}. \quad (77)$$

Предполагая, что мы далеки от резонанса, считаем $\Gamma = 0$ в уравнении (74). Имеем [см. уравнение (3.17), п.3.2]

$$A_d = \frac{F_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{qE_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, получим

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{4\pi N q^2}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (78)$$

Чтобы применить этот результат, полученный для простой модели с одним резонансом, к реальному стеклу, мы должны просуммировать вклады в $n^2 - 1$ по всем существенным резонансам. Поэтому ω_0^2 , грубо говоря, имеет смысл средней резонансной частоты (см. задачу 3.20), а N равно произведению числа молекул стекла в кубическом сантиметре на среднее число учитываемых резонансов для молекулы. Число электронов, которые дают реальный вклад в (78), равно числу электронов на внешней оболочке атома, т. е. валентных электронов.

Для частоты ω в диапазоне частот видимого света наиболее существенные резонансы в стекле находятся в ультрафиолетовой области, соответствующей длинам волн $\lambda = c/v$ порядка 1000 \AA (10^{-5} см) или меньше. Длины волн видимого света примерно в пять раз больше, а частоты ω видимого света соответственно в пять раз меньше, чем средняя резонансная частота ω_0 . В этом случае в соответствии с уравнением (78) $n^2 - 1$ положительно, что согласуется с опытом. Заметим также, что при возрастании ω (ω всегда остается меньше, чем ω_0) знаменатель $\omega_0^2 - \omega^2$ в уравнении (78) уменьшается и $n^2 - 1$ возрастает. Поэтому голубой свет (более высокие частоты) должен иметь больший показатель преломления, чем красный. Это находится в согласии с опытом: призма отклоняет голубой свет сильнее, чем красный.

Фазовые скорости, большие c . Когда частота ω внешнего воздействия (представляющего собой свет, т. е. электромагнитное излучение) меньше резонансной частоты ω_0 , мы имеем приведенный выше результат. Из него следует, что фазовая скорость меньше c , длина волны меньше длины волны в вакууме и возрастание частоты вызывает увеличение показателя преломления. Такое изменение показателя преломления с частотой называется «нормальной» дисперсией. Если же сместиться в область ультрафиолета, где частота внешнего воздействия больше резонансной частоты, то величина $n^2 - 1$, как это видно из (78), станет отрицательной (n^2 меньше единицы). Если n^2 лежит между нулем и единицей, мы опять имеем нормальную дисперсию. Но в этом случае фазовая скорость больше c , длина волны больше длины волны в вакууме и увеличение частоты приводит к возрастанию показателя преломления (когда частота станет в конце концов очень большой, то n приблизится к единице и среда будет вести себя подобно вакууму). В частотном диапазоне вблизи резонансной частоты $\omega_0 - 1/2\Gamma < \omega < \omega_0 + 1/2\Gamma$ показатель преломления уменьшается с возрастанием ω . Это область «аномальной» дисперсии.

Физическая причина того, что фазовые скорости могут быть больше c , заключается в существующем соотношении между фазой

возмущающей силы $qE(t)$ и фазой колебаний $x(t)$ заряда q , на который действует эта сила. Мы знаем, что если частота внешнего воздействия меньше резонансной частоты, то смещение $x(t)$ будет «следовать» за $qE(t)$, т. е. заряд будет колебаться в фазе с внешней силой. При смещении заряда возникает электрическое поле, которое уменьшит внешнее поле. Уменьшение внешнего поля приведет к уменьшению возвращающей силы и соответственно к уменьшению фазовой скорости. После перехода через резонанс (когда $\omega > \omega_0$) смещение заряда $x(t)$ находится в противофазе с внешней силой $qE(t)$. Поле, образованное смещением заряда, усиливает внешнее поле $E(t)$, что в свою очередь приводит к увеличению возвращающей силы, и фазовая скорость будет больше скорости света c в вакууме.

Хорошей иллюстрацией сказанного может быть пример с маятником. Если на маятник действует периодическая сила с частотой, меньшей собственной частоты колебаний маятника, то колебания происходят в фазе с этой силой. Если же частота вынуждающей силы больше резонансной частоты, то колебания маятника будут в противофазе с внешней силой. Можно сказать, что в факте превышения фазовой скоростью скорости c таинственного и непонятного не больше, чем в том, что гиря маятника движется направо, тогда как внешняя сила направлена налево.

Экспоненциальные волны — реактивный частотный диапазон. Если частота внешней силы $\omega > \omega_0$, то в соответствии с (78) $n^2 < 1$. При значениях n^2 между нулем и единицей мы имеем синусоидальные волны, т. е. k^2 — положительное число. Это совершенно справедливо для случая достаточно больших ω (когда $\omega > \omega_0$), так как для таких значений ω величина n^2 лишь незначительно отличается от единицы. Однако в области частот от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \omega_0$ плюс несколько Γ величина n^2 отрицательна. Эта область частот определяется неравенством

$$\frac{4\pi Nq^2}{M} > \omega^2 - \omega_0^2. \quad (79)$$

Мы должны оговорить, что $\omega^2 - \omega_0^2 \gg \Gamma\omega_0$ (т. е. мы находимся достаточно далеко за резонансом и поэтому можем использовать приближенное выражение для A_d). Таким образом, если выполнено условие (79), то из (78) следует, что n^2 отрицательно, а это означает, что k^2 также отрицательно. Полученный результат означает, что дифференциальное уравнение волны в пространстве

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = -k^2 \psi(z, t), \quad k^2 > 0, \quad (80a)$$

будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = +\kappa^2 \psi(z, t), \quad \kappa^2 > 0, \quad (80б)$$

и его решением будут не синусоидальные, а экспоненциальные волны. С подобным положением мы встречались и раньше в случае

связанных маятников: (Когда дисперсионное соотношение для k^2 дает отрицательные значения k^2 , мы меняем обозначение k^2 на $-k^2$.)

Мы приведем качественный вывод условий, для которых справедливо уравнение (79), после того, как рассмотрим специальный случай $\omega_0=0$. Этот специальный случай дает закон дисперсии для ионосферы.

Пример 7. Дисперсия в ионосфере. В п. 2.4 (пример 6) мы дали простую модель плазмы в ионосфере Земли и определили частоту ω_p свободных колебаний плазмы. В этой модели мы пренебрегли движением положительных ионов, а также затуханием движения свободных электронов. (В действительности существует затухание, обусловленное столкновениями между электронами и ионами, при которой энергия колебаний переходит в «беспорядочную» тепловую энергию.) Уравнение движения отдельного электрона с зарядом q и массой M имеет вид

$$M\ddot{x} = qE(t), \quad (81)$$

где $E(t)$ — электрическое поле в месте нахождения электрона. В случае свободных колебаний $E(t)$ задается величиной поляризации, приходящейся на единицу объема:

$$E(t) = -4\pi P(t) = -4\pi Nqx(t). \quad (82)$$

Из (81) и (82) следует уравнение свободных колебаний

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi Nq^2}{M}x \equiv -\omega_p^2 x. \quad (83)$$

Таким образом, мы повторили (более кратко) вывод уравнения движения для колебаний плазмы при частоте ω_p . Теперь предположим, что один «конец» плазмы находится под действием силы, вызванной радио- или телепередатчиком. (Чтобы упростить задачу, предположим, что ее «геометрия» эквивалентна передающей линии из параллельных пластин.) В этом случае $E(t)$ будет суперпозицией двух величин [по аналогии с (71)]:

$$E(t) = E_{\Pi} - 4\pi P(t). \quad (84)$$

Здесь E_{Π} (индекс «п» означает передатчик) — поле, которое существовало бы в отсутствие свободных колебаний. Уравнение движения электрона в плазме аналогично уравнению движения электрона в «молекуле стекла» [уравнение (74)] при условии, что коэффициент упругости $K = M\omega_0^2$ и коэффициент затухания Γ равны нулю. Таким образом, свободный электрон имеет «нулевую резонансную частоту», т. е. $\omega_0=0$. Поэтому значение показателя преломления или дисперсионное соотношение для этого случая можно получить, положив $\omega_0=0$ в уравнении (78):

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = n^2 = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (85)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi Ne^2/M$. Умножая обе части уравнения (85) на ω^2 , получим уравнение, которое было выведено в главе 2:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad \omega^2 \geq \omega_p^2. \quad (86)$$

Для реактивной области частот имеем экспоненциальные волны:

$$\omega^2 = \omega_p^2 - c^2 k^2, \quad \omega^2 \leq \omega_p^2. \quad (87)$$

Нужно, однако, заметить, что наша модель ионосферы не совсем точна. Некоторые физические предположения, сделанные нами, не выполняются в действительности, и дисперсионное соотношение имеет более сложный вид, чем выражения (86) и (87). Например, для существенно низких частот электрон в среднем испытывает несколько соударений с ионами за один цикл колебаний. В этом случае необходимо учитывать затухание, мы же пренебрегали им. Далее, при некоторых частотах, отличных от ω_p , в плазме возникают резонансы. Например, для низких частот становятся важными колебания плазмы, обусловленные движением ионов. (Частота таких колебаний плазмы близка к 100 кГц.) Нужно также учитывать «циклотронную частоту» ω_c , которая соответствует круговому движению электронов в магнитном поле Земли. (Это поле порядка 0,5 гс*.)

Качественное объяснение граничной частоты. Мы знаем, что для любой системы (например, для системы связанных маятников) частота первой моды свободных колебаний является также самой низкой частотой синусоидальных волн, когда система находится под действием внешней силы. Таким образом, частота первой моды является также граничной частотой вынужденных колебаний. Для частот внешнего воздействия, меньших этой частоты, волны экспоненциальны. Точно на частоте порога длина волны синусоидальных волн бесконечна (в этом случае все маятники колеблются в фазе). Таким образом, если мы хотим узнать дисперсионное соотношение для граничной частоты, нам следует положить $k=0$. Частота, полученная из дисперсионного соотношения при $k=0$, и будет граничной частотой. Эту частоту будем обозначать $\omega_{гр}$. В нашем примере коэффициент преломления равен [см. уравнение (78)]

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{4\pi N q^2}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Полагая $k=0$, получим значение граничной частоты:

$$\omega_{гр}^2 = \omega_0^2 + \frac{4\pi N q^2}{M}. \quad (88)$$

Теперь вспомним, что ω^2 — это возвращающая сила, приходящаяся на единицу массы и единицу смещения. В соответствии с тем, что говорилось выше для ионосферы, возвращающая сила (на единицу массы и единицу смещения) для свободных колебаний электрона в ионосфере равна $\omega_p^2 = 4\pi N q^2 / M$. Это первая нормальная мода колебаний для электронов, которая имеет бесконечную длину волны (т. е. все электроны колеблются в фазе). Очевидно, что если теперь к каждому колеблющемуся заряду приложить связывающую силу с помощью «пружины с коэффициентом жесткости» $M\omega_0^2$, то мы про-

*) Интересное обсуждение экспериментальных данных можно найти в статье: W. Calvert, R. Knecht, T. Van Zandt, Science 146, 391 (1964).

сто увеличим возвращающую силу (на единицу массы и единицу смещения), действующую на каждый заряд, на ω_0^2 . В этом случае заряды опять колеблются в фазе и k равно нулю, так что поведение системы соответствует первой моде свободных колебаний. Теперь мы видим, что правая часть уравнения (88) определяет возвращающую силу на единицу массы и на единицу смещения для первой моды свободных колебаний. Поэтому это — граничная частота. Таким образом, уравнение (88), так же как и неравенство (79), справедливо для реактивной области частот, где волны экспоненциальны.

Приведем еще одно физическое объяснение существования граничной частоты. Для простоты положим $\omega_0 = 0$. В этом случае наша «модель» — это ионосфера. Нас интересует причина существования граничной частоты, равной

$$\omega_{\text{гр}}^2 = \frac{4\pi Nq^2}{M}. \quad (89)$$

Заметим, что ионосфера (или наша модель ионосферы) во многих отношениях похожа на металлический проводник. В обоих случаях существуют свободные электроны, которые могут создавать электрический ток, если приложено электрическое поле. Далее, если металлический проводник находится в статическом электрическом поле (когда заряды внутри проводника неподвижны, а приложенное поле постоянно во времени), то поле внутри проводника равно нулю, так как внешнее поле уравнивается полем, образованным зарядами, которые под действием внешнего поля продвинулись к поверхности металла. Если внешнее поле внезапно изменится, то электронам потребуется определенное время, чтобы занять новое положение равновесия и образовать поле, которое уравнивает внешнее поле внутри проводника. Поэтому в первый момент времени, пока электроны не заняли равновесного положения, поле внутри проводника не равно нулю. Среднее время, которое нужно электронам, чтобы занять равновесное положение, назовем временем релаксации и обозначим через τ . Если время изменения внешнего поля будет меньше τ , то поток зарядов не успеет образовать поле, противоположное внешнему. Таким образом, мы можем сказать, что *граничная частота системы порядка τ^{-1}* . Для электромагнитного излучения с частотой большей, чем $1/\tau$, электроны не успевают занять такое положение, при котором созданное ими поле уничтожит внешнее поле. Поэтому можно сказать, что наша среда прозрачна для частот, больших пороговой частоты $1/\tau$. В случае «бесконечно большой» частоты электроны вообще не будут двигаться и вещество, подобно вакууму, будет прозрачно для излучения. Если же один конец системы возбуждается с частотой, меньшей граничной частоты, то система будет аналогична фильтру высоких частот, находящемуся под внешним воздействием с частотой, меньшей граничной частоты. В точках среды, близко расположенных к концу, находящемуся под внешним воздействием, поле будет равно внешнему полю. В более далеких точках у электронов будет достаточно времени, чтобы занять положение, при кото-

ром внешнее поле внутри среды уничтожится. Таким образом, по мере удаления от места приложения внешней силы (излучения) мы будем наблюдать экспоненциальное уменьшение поля внутри среды с ростом расстояния. Аналогичную картину мы наблюдали для фильтра высоких частиц, составленного из связанных маятников.

Оценим время релаксации τ . Предположим, что в момент времени $t=0$ возникает поле E_0 . В результате электроны начинают двигаться с ускорением, равным $a=qE_0/M$. Если в течение времени t это ускорение остается постоянным, то электроны пройдут расстояние, равное $\frac{1}{2} at^2$. Для наших грубых оценок мы можем опустить $\frac{1}{2}$. Тогда получим

$$x \approx \frac{qE_0}{M} t^2. \quad (90)$$

Предположим, что движение зарядов ограничено поверхностями плазмы (ионосферы) или металла. В этом случае избыток заряда на одной поверхности (и уменьшение заряда на другой поверхности) равен

$$Q = NqxA, \quad (91)$$

где N — плотность числа зарядов, A — площадь поверхности и x — смещение. Заряд Q на одной поверхности и $-Q$ на другой образуют поле E , равное

$$E = 4\pi \frac{Q}{A} = 4\pi Nqx \approx 4\pi Nq \frac{qE_0 t^2}{M}. \quad (92)$$

Если время t достаточно, чтобы поле E (уравновешивающее поле) смогло достичь значения E_0 , наступает равновесие. Поэтому время релаксации получается из (92) заменой t на τ и E на E_0 . Имеем

$$\omega_{гр}^2 \approx \tau^{-2} \approx \frac{4\pi Nq^2}{M},$$

а это согласуется с точной формулой (89).

Качественное обсуждение поведения показателя преломления в дисперсивной полосе частот. Изолированная заряженная частица, колеблющаяся в вакууме, излучает электромагнитные волны, которые распространяются в вакууме со скоростью света. Поэтому заряд, совершающий под действием падающего света установившиеся колебания, испускает электромагнитное излучение, распространяющееся в вакууме со скоростью c . Вследствие суперпозиции первичного поля с полем, образованным колеблющимся зарядом, возникает некое результирующее поле. При большом числе зарядов (кусок стекла или ионосфера) каждый из них находится под действием электрического поля, существующего в окрестности заряда. Это локальное поле является суперпозицией «первичного поля», которое имело бы место при отсутствии зарядов, и поля, образованного всеми колеблющимися зарядами.

Каждый колеблющийся заряд (в куске стекла, например) испускает волны, распространяющиеся в данной среде с той же самой

скоростью c , что и скорость света в вакууме. Каким же образом суперпозиция волн, имеющих одинаковую скорость c , одинаковую частоту ν и поэтому одинаковую длину волны c/ν , дает длину волны λ , отличную от c/ν , и фазовую скорость, отличную от c ? Оказывается, что «дело в фазе». Все зависит от соотношения фаз поля, образованного зарядом, и внешнего поля, действующего на заряд. Если поле, образованное зарядом, находится в фазе с внешним полем, то в некоторой удаленной точке оно будет увеличивать внешнее поле (будет иметь место, как говорят теоретики, конструктивная интерференция), но не изменит фазу общего поля, и поэтому фазовая скорость не изменится. Аналогично, если излучаемое поле сдвинуть по фазе на 180° относительно внешнего, то суперпозиция этих двух полей даст результирующее поле меньшей величины, чем внешнее поле (деструктивная интерференция), однако фаза снова не будет изменена. Для того чтобы фаза результирующего поля изменилась, необходимо, чтобы поле, излучаемое зарядом, было сдвинуто на $\pm 90^\circ$ относительно внешнего поля.

Предположим, что в определенной точке, куда приходит волна, при отсутствии стекла существует внешнее поле $E_0 \cos \omega t$. Это поле может быть вызвано, например, световым излучением лампы. Если поместить между наблюдателем и лампой стекло, то поле от лампы будет *по-прежнему* равно $E_0 \cos \omega t$ и будет распространяться через стекло со скоростью c . Теперь предположим, что колеблющаяся молекула стекла дает вклад в поле, равный $\mathcal{E} \sin \omega t$, где \mathcal{E} очень мало и (например) положительно. Это излучение также проходит через стекло со скоростью c , но имеет 90° -ный сдвиг относительно внешнего поля. Результирующее поле в точке наблюдения равно

$$E(t) = E_0 \cos \omega t + \mathcal{E} \sin \omega t;$$

для $\mathcal{E} \ll E_0$ это равносильно равенству

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t - \delta), \quad \delta \equiv \frac{\mathcal{E}}{E_0} \ll 1.$$

Таким образом, наличие стекла вызывает в точке наблюдения результирующее поле $E(t)$, сдвинутое по фазе на угол δ . Наблюдатель в этой точке должен ждать дольше, чем, допустим наблюдатель вне стекла, чтобы фаза $E(t)$ приобрела заданное значение, т. е. он должен ждать до тех пор, пока величина $\omega t - \delta$ достигнет значения ωt вне стекла. Поэтому он считает, что фазовая скорость меньше c . Заметим, что если бы вклад от молекулы стекла был пропорционален $\cos \omega t$, то не было бы сдвига фазы результирующего поля

$$E(t) = (E_0 + \mathcal{E}) \cos \omega t$$

и скорость равнялась бы скорости света в вакууме c . Опыт, однако, показывает, что фазовая скорость результирующего излучения отлична от c , несмотря на то что каждое слагаемое суперпозиции распространяется со скоростью, равной c . Это означает, что излучение молекул стекла в момент времени t сдвинуто по фазе относительно внешнего излучения в этот же момент времени на $\pm 90^\circ$.

Нам осталось показать, как возникает такой сдвиг. Предположим, что внешнее поле равно $E_0 \cos \omega t$. Тогда смещение заряда будет $x(t) = A_d \cos \omega t$, если частота ω далека от резонансной. В главе 7 мы увидим, что излучение колеблющегося заряда пропорционально «запаздывающему ускорению». Это значит, что поле на расстоянии z пропорционально ускорению, которое заряд имел в более раннее время $t - (z/c)$. Для гармонического движения ускорение равно произведению $-\omega^2$ на смещение. Таким образом, мы получаем «ужасный» результат, из которого следует, что излучение от каждого колеблющегося заряда пропорционально $\cos \omega t$, тогда как для получения фазовой скорости, отличной от c , необходимо, чтобы оно было пропорционально $\sin \omega t$! Объяснение заключается в следующем.

Предположим, что плоская волна излучения распространяется в направлении z . Тогда в данный момент времени мы должны рассматривать вклад не только от одной молекулы, но и от всех молекул, заключенных в тонкой пластинке стекла, перпендикулярной направлению распространения волны. Как мы только что видели, молекулы вблизи точки наблюдения дают бесконечно малые вклады, находящиеся в фазе с внешним полем (мы пренебрегаем знаком); но другие молекулы в пластинке находятся на большем расстоянии от точки наблюдения. Излучению от этих молекул требуется некоторое время, чтобы подойти к точке наблюдения. (Излучение распространяется со скоростью c .) После интегрирования по бесконечно широкой пластинке (см. главу 7) результирующий вклад будет сдвинут на -90° относительно вклада, даваемого молекулами в точке наблюдения, или, что то же самое, относительно внешнего возмущения. Таким образом, мы знаем источник 90° -градусного сдвига и понимаем теперь, каким образом много волн, каждая из которых распространяется со скоростью c , могут в результате суперпозиции дать результирующую волну, фазовая скорость которой не равна c . Будет ли фазовая скорость больше или меньше c , зависит только от того, находятся вынужденные колебания в фазе или в противофазе с внешним воздействием, а это в свою очередь зависит от того, будет ли частота внешнего воздействия меньше или больше резонансной частоты.

Терминология. Почему мы говорим об электрическом поле \mathbf{E} и пренебрегаем магнитным \mathbf{B} . Мы поступаем так не всегда, но достаточно часто. Частично причина в следующем: когда электромагнитные волны взаимодействуют с частицей, имеющей заряд q и скорость \mathbf{v} , на частицу действует лоренцевская сила (том II, п. 5.2)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}.$$

В случае электромагнитных волн в вакууме \mathbf{E} и \mathbf{B} имеют одинаковые значения. Поэтому второй член в выражении для лоренцевской силы меньше первого на множитель $|\mathbf{v}/c|$. Если, например, поле создано обыкновенным источником света или даже очень мощным

лазером, то напряженности \mathbf{E} и \mathbf{B} настолько малы, что максимальная скорость $|\mathbf{v}|$, которую может приобрести электрон в установившемся движении, значительно меньше c . Поэтому во многих физических ситуациях можно пренебречь силой, связанной с \mathbf{B} .

Возможны случаи, когда влияние поля \mathbf{B} будет преобладать. Если поля \mathbf{E} и \mathbf{B} созданы не излучением (бегущей волны), а (например) статическими полями независимых зарядов или токов, то \mathbf{B} и \mathbf{E} не обязательно будут равны по величине. Например, легко представить себе случай, когда $|\mathbf{E}|=0$, а $|\mathbf{B}|=100$ кэс.

4.4. Импеданс и поток энергии

При изучении мод и стоячих волн мы узнали, что непрерывную среду можно характеризовать двумя параметрами: «возвращающей силой» и «инерцией». Для непрерывной струны возвращающая сила определяется натяжением T_0 в равновесном состоянии, а инерция определяется линейной плотностью ρ_0 . У передающей линии соответствующими параметрами являются $(C/a)^{-1}$, т. е. величина, обратная емкости на единицу длины, и L/a — индуктивность на единицу длины. Для продольных волн в струне параметр, характеризующий возвращающую силу, — это Ka , а параметр, определяющий инерцию, равен $M/a = \rho_0$. Для звуковых волн такими параметрами соответственно являются $\gamma\rho_0$ и объемная плотность ρ_0 . Во всех случаях моды стоячих волн ведут себя аналогично простому гармоническому осциллятору. (Для таких систем, как связанные маятники или широкополосный фильтр, нам необходим еще один параметр, а именно граничная частота.)

Однако для описания бегущих волн рассмотренные параметры не подходят. Бегущие волны переносят энергию и импульс, и фазовые соотношения для бегущих волн отличны от фазовых соотношений для стоячих волн. Бегущие волны в непрерывной протяженной среде не похожи на большой гармонический осциллятор, и такие характеристики гармонического осциллятора, как возвращающая сила и инерция, не годятся для описания бегущих волн. Величиной, которая может характеризовать среду, где распространяются бегущие волны, является фазовая скорость v_ϕ . Для поперечных волн в струне фазовая скорость равна

$$v_\phi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \quad (93)$$

Это выражение является своего рода комбинацией параметров T_0 и ρ_0 , определяющих возвращающую силу и инерцию. Возможна еще одна независимая комбинация этих параметров:

$$Z = \sqrt{\rho_0 T_0}, \quad (94)$$

которая называется *характеристическим импедансом* или просто *импедансом* для поперечных волн в непрерывной струне. Мы покажем, что импеданс характеризует скорость, с которой энергия